Libros de Cátedra

Electricidad y magnetismo

Carlos Alejandro Paola, María Alejandra De Vito
y Lorena Daniela Dirani

FACULTAD DE
CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS

FACULTAD DE
INGENIERÍA

e
exactas





ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Carlos Alejandro Paola
María Alejandra De Vito
Lorena Daniela Dirani

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Facultad de Ingeniería







A Cecilia, Mercedes, Sofía, Clara y Lucía.

Agradecimientos

Quisiéamos expresar nuestro más sincero agradecimiento a las Instituciones que respaldaron nuestro trabajo, la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas y la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. En particular, al Dr. Marcelo Trivi (Profesor Titular de la Cátedra de Física II de la Fac. de Ingeniería) que siempre alentó la producción de este material. Además, quisiéramos agradecer a Sofía Giovannini y a Cecilia Paola por las creaciones artísticas que embellecen este texto. A Federico Bareilles por sus fotografías y los invalorables aportes técnicos. A Martina Iriart y Analía Polizzotto por las incalculables horas dedicadas a la corrección de estas páginas.

La noche estaba habitada de extraños latidos. El cielo se recortaba como el techo de una gran caverna de tonalidades rojizas fluctuantes. Primero aparecieron los rumores graves y lejanos. Luego una calma con resplandores difusos y extendidos que se iniciaban por el oeste. Unas pocas gotas grandes presagiaban la tempestad. Los rumores poco a poco se hicieron notar como las teclas graves del piano pasionalmente pulsadas. Los resplandores se localizaban ahora con más claridad. Entonces fue que ocurrió... Una arborescencia de luz trepó al cielo haciendo que súbitamente la noche se tornara en día . Y tras cartón, el colosal estampido, que hizo temblar las raíces mismas de este mundo...

ALEJANDRO PAOLA, ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Índice general

Prólogo

Este trabajo fue concebido como una contribución al dictado de cursos introductorios a la Electricidad y el Magnetismo en carreras de Ciencias y Tecnología. Naturalmente, cuando de aportes se trata, la intención es presentar los temas desde miradas alternativas. Un lector ya familiarizado con los contenidos que trata este libro probablemente observe diferencias sustanciales de enfoque respecto de la bibliografía clásica. Tales diferencias provienen de nuestra experiencia de muchos años de dictar estos cursos en los diversos niveles que ofrece la Universidad Nacional de La Plata.

En relación con los abordajes, es conveniente advertir que el nivel matemático necesario está un escalón arriba respecto de los textos más difundidos sobre el tema. Sin embargo, podríamos decir que dichos requerimientos son cubiertos, en general, por los cursos de matemática previos. En concreto, priorizamos los tratamientos vectoriales con la intención de lograr un entrenamiento matemático como valor agregado a los conceptos físicos introducidos. Asimismo, un concepto geométrico recurrente a lo largo de estas páginas, lo constituyen las simetrías. Dicho concepto apuesta a desarrollar una forma de pensar más intuitiva en los planteos que excede ampliamente la temática del curso. Nosotros creemos que este abordaje es original, en tanto no ha sido incluido en textos del mismo nivel.

En cuanto a la presentación de los conceptos físicos, optamos por la secuencialidad histórica, aunque intercalamos permanentemente aspectos modernos provenientes de modelados mucho más recientes (por ejemplo, aspectos microscópicos de la materia). Dado que la Teoría Electromagnética Clásica en su conjunto constituye uno de los más importantes ejemplos de consistencia conceptual en la Historia de la Física, es también nuestra intención transferir a los estudiantes el gusto por la elegancia formal de la teoría y sus tratamientos. Estamos convencidos del valor estético subyacente en las teorías científicas, aunque somos concientes de que se requiere un largo camino para poder disfrutarlo. Nos sentiríamos muy complacidos de saber que este trabajo pueda contribuir a despertar el deseo de transitar este camino.

Carlos Alejandro Paola, La Plata, Noviembre de 2017

Capítulo 1
Electrostática. Leyes básicas

1.1. Los fenómenos eléctricos

Como tantos fenómenos naturales, la electricidad existía mucho antes del advenimiento de la física. Primero fue un pequeño (y posiblemente inadvertido) conjunto de hechos inconexos carentes de denominación. Luego, el interés de unos pocos (casi siempre griegos) dio lugar a los primeros reportes donde surgieron los nombres. Entonces la electricidad tuvo entidad, y muchos fenómenos se encolumnaron tras este nombre...

El inicio de los tiempos científicos le dio un nuevo impulso al tema. El salto cualitativo fue grande, pasando a una nueva instancia del conocimiento. Además de describir se pretendió comprender. Desentrañar las leyes escondidas en la fenomenología. Y en eso estamos. Humildemente creemos que la comprensión de la electricidad va por buen camino, aunque la ciencia bien entendida siempre se reservará el derecho a la duda (por eso es seria). Tal vez, el principal reaseguro del conocimiento acerca de la electricidad sea la tecnología que de ella deriva. El lector podrá producir una lista de ejemplos que le resulten familiares, por lo que no será necesaria tal enumeración aquí. Sin embargo, es interesante enfatizar que el camino del conocimiento es bastante parecido, cualquiera que sea la fenomenología que se quiere comprender. Por tanto, valga esta pequeña introducción como una mirada global, a lo que fue (y sigue siendo) el desarrollo científico.

1.2. Breve reflexión sobre la carga eléctrica

La carga eléctrica es la propiedad de los cuerpos que toman parte en las interacciones eléctricas. Tal vez el lector considere que esta frase no constituye una definición lícita, o acaso no es más que un juego de palabras. Respuestas

rápidas a preguntas tales como ¿de qué color son las naranjas? o ¿qué sabor tiene la sal? adolecen más o menos de los mismos problemas. Sin embargo, la falta de una respuesta categórica (en sentido académico) no impide que las personas tengan pleno conocimiento del color de las naranjas o del sabor de la sal. El conocimiento proviene de la experiencia; después viene el lenguaje que comunica dicho conocimiento y, por último, su formalización. La carga eléctrica comparte su dificultad de definición con la masa gravitatoria, la masa inercial o el tiempo. Aquí sugerimos al lector que esté entrenado en operar con estos conceptos, que intente definirlos. Luego evalúe cuánto ha significado esta falta de definición formal en su entrenamiento.

1.3. Concepto de carga eléctrica

La carga eléctrica admite una definición intuitiva, basada en una serie de propiedades simples observadas experimentalmente. Estas propiedades solo sugieren una idea difusa sobre la naturaleza de la carga, pero aportan un instrumento concreto y operable sobre el que pudo edificarse la teoría electromagnética macroscópica. Las propiedades observadas más importantes son las siguientes:

- La carga eléctrica se encuentra en la naturaleza inseparablemente vinculada a un portador material (con masa y volumen no nulos).
- Si un objeto material no posee carga eléctrica, no podrá esperarse de él ninguna interacción eléctrica[1].
- Las cargas eléctricas interactúan entre sí manifestándose mediante efectos dinámicos (atracciones y repulsiones) que permiten distinguir dos clases de carga. Por la manera en que la carga se inserta en el aparato matemático se las distingue con signos + y -, pero la asignación es convencional. Esto significa que los fenómenos que describe la teoría serán idénticos si se permuta la convención de signos.
- Es posible comparar las cargas eléctricas estableciendo relaciones de orden y equivalencia[2], con lo que se concluye que es una magnitud medible

[1]No obstante, la experiencia indica que ningún cuerpo macroscópico resulta completamente insensible a los efectos eléctricos. Esto sugiere el íntimo arraigo de la carga en la materia, aún en los objetos aparentemente neutros.

[2]En lo que respecta a magnitudes físicas, relaciones de orden y equivalencia existen cuando ciertos instrumentos permiten comparar dicha magnitud entre dos cuerpos (a y b). La relación de orden surge cuando puede establecerse que la magnitud observada en a es mayor que la observada en b o viceversa. La relación de equivalencia se tiene cuando el instrumento permite determinar que las magnitudes observadas en ambos cuerpos son iguales. Como ejemplo, si la magnitud observada es la masa, el instrumento adecuado es la balanza de platillo.

y, por tanto, operativamente apta para la teoría electromagnética. Solo falta definir una unidad para darle entidad a la carga eléctrica. En el Sistema Internacional (SI) se adopta como unidad el “Coulomb" o “Coulombio", simbolizado por “C". Su inserción en el cuadro de las unidades SI se tratará más adelante.

1.4. Enfoques microscópico y macroscópico

La carga eléctrica fue introducida en la teoría como una propiedad macroscópica continua que podía ser adquirida por la materia. En tal sentido, las primeras ideas sugerían que la materia era eléctricamente neutra, pudiendo activarse su participación en fenómenos eléctricos mediante la adquisición de carga. Sin embargo, desde un principio existían evidencias acerca de la íntima vinculación entre la carga eléctrica y la materia. Un fenómeno muy conocido que permitió especular sobre esto, es aquel en que dos cuerpos se cargan por frotamiento. Uno adquiere carga positiva y el otro negativa. Pero, ¿de dónde sale la carga? Lo que se especuló rápidamente fue que los cuerpos poseían cargas compensadas (es decir, tanta carga positiva como negativa), y que el frotamiento, o más precisamente el contacto, eran puentes de transferencia de la carga entre los cuerpos.

A partir del último cuarto del siglo XIX, el conocimiento acerca de la intimidad de la materia ha crecido vertiginosamente. Los modelos y experimentos que fueron perfeccionándose desde entonces, nos dan una idea muy precisa sobre la conexión entre carga eléctrica y materia. Hoy reconocemos que las partículas que poseen carga eléctrica son los protones y los electrones. Ellos tienen cargas positivas y negativas respectivamente, cuyo valor absoluto es

$$e = 1,62 \times 10^{-19} \text{ C} \tag{1.1}$$

A esta magnitud se la conoce como **carga elemental**, y actualmente sabemos que la carga adquirida por un cuerpo macroscópico será siempre un múltiplo de la carga elemental. En este sentido, decimos que la carga es una magnitud “cuantizada", en contraposición con el carácter continuo que se le atribuyó originalmente. Sin embargo, la pequeñez de la magnitud e hace que la mayoría de los fenómenos macroscópicos sean insensibles a tal cuantización.

A continuación vamos a referirnos brevemente a los electrones y protones. Es importante observar que, a diferencia de los cuerpos macroscópicos, los electrones y protones poseen cargas inalterables. Esto significa que la carga de estas partículas es una propiedad intrínseca de la partícula. Ni los electrones ni los

protones pueden ceder o adquirir carga eléctrica[3]. Como la materia está formada por estructuras compuestas por electrones y protones (átomos, moléculas, iones, etc), debemos entender que en ellos yace la carga eléctrica, y que la misma se encuentra localmente compensada. Cualquier proceso de transferencia de carga es entonces, una transferencia de partículas cargadas.

1.5. Electrostática y soportes mecánicos

La electrostática describe los fenómenos que tienen lugar en sistemas donde distribuciones de carga eléctrica mantienen su localización invariante en el tiempo. En otras palabras, los cuerpos cargados deben permanecer en reposo. Aún más, cada porción de carga debe permanecer en reposo dentro del cuerpo cargado. Aquí se pone de manifiesto la necesidad de un “soporte mecánico" que permita el equilibrio estable de los cuerpos en los que reside la carga, a la vez que impida la migración de carga dentro de cada cuerpo.

Las interacciones entre cuerpos cargados se manifiestan mediante fuerzas, que debido a su naturaleza se las denomina **fuerzas eléctricas**. Si un cuerpo cargado en reposo estuviera afectado exclusivamente por una fuerza eléctrica no nula, el mismo iniciaría un movimiento. Entonces ya no cumpliría con la condición electrostática. Es por esto que la estabilidad de un cuerpo cargado requiere de un soporte mecánico que responda bloqueando la posibilidad de movimiento. Resulta mucho más delicado aún bloquear las migraciones de carga “dentro" del cuerpo. Esto no es posible en general, aunque bajo ciertas condiciones las distribuciones de carga se estabilizan. Lo que ocurre dentro de los cuerpos, con carga neta o no, es una “redistribución" de la carga que, en ciertos casos, alcanza el equilibrio estable. En el proceso en que la carga busca tal estado de equilibrio, decimos que el sistema se encuentra en un régimen transitorio, durante el cual existen desplazamientos de cargas a los que en el futuro identificaremos como “corrientes eléctricas". Una vez finalizado tal proceso, la carga alcanzará el equilibrio, quedando en condiciones electrostáticas.

Resumamos todo esto en un lenguaje algo más técnico. La condición electrostática se alcanza cuando el sistema de cuerpos cargados está bloqueado por una estructura resistente, y cada cuerpo ha concluido su “relajación interna" hasta alcanzar el equilibrio estable compatible con sus “ligaduras" [4].

[3]Ciertos fenómenos cuánticos que involucran la creación o aniquilación de partículas deben considerarse como una excepción . Su tratamiento es “no clásico", no lo abordaremos aquí.

[4]Por el momento no profundizaremos sobre el concepto de ligadura. Solo diremos al respecto que constituye una barrera física. Por ejemplo, los cuerpos que caen podrían llegar hasta el centro de la Tierra si no se encontraran con el suelo en su caída. Entonces el suelo es una barrera a la que genéricamente llamamos “ligadura".

1.6. Partículas puntuales cargadas

Muchos fenómenos físicos admiten ser tratados mediante el modelo de partícula. Por ejemplo, la órbita de la Tierra alrededor del Sol, analizada desde la teoría de gravitación universal, puede determinarse con excelente calidad suponiendo que la Tierra es una partícula. En tal caso, suponemos que la masa de la Tierra está concentrada en un objeto “puntual". Este tipo de modelado puede hacerse cada vez que las dimensiones lineales del cuerpo resulten muy pequeñas comparadas con las distancias involucradas en el fenómeno analizado[5].

El mismo criterio puede utilizarse en electrostática. Cuando la carga eléctrica reside sobre un cuerpo cuyas dimensiones son muy pequeñas comparadas con las distancias de interacción, podemos modelar al cuerpo como una partícula puntual. Es habitual la denominación **carga puntual** para referirse al caso en que la carga eléctrica reside sobre un cuerpo puntual. Es importante remarcar que las cargas puntuales solo existen en los modelos; nunca en la realidad.

1.7. Densidades de carga

Según hemos visto, la carga eléctrica siempre reside sobre un cuerpo material. Bajo condiciones especiales, tales cuerpos pueden representarse con el modelo de partícula (sección 1.6). Pero en general la carga se distribuirá en el volumen del cuerpo de maneras diversas. Entonces nos encontramos frente a la necesidad de describir qué fracción de la carga se encuentra en cada elemento de volumen del cuerpo. Para ello introducimos el concepto de **densidad volumétrica de carga** $\delta(\vec{r'})$.

Comencemos por considerar un cuerpo sobre el que reside una distribución de cargas. Imaginemos ahora un mallado tridimensional que subdivide al cuerpo en pequeñísimos volúmenes cúbicos. Entonces, si la carga está distribuida de alguna forma sobre el cuerpo, podemos pensar que en cada cubito reside una pequeña fracción de la carga. Sea $\vec{r'}$ el vector que identifica el centro de uno de dichos cubitos. Entonces decimos que la densidad volumétrica de carga $\delta(\vec{r'})$ es, en sentido intuitivo, el cociente entre la carga Δq residente en el cubito centrado en $\vec{r'}$ y el volumen Δv de dicho cubito:

$$\delta(\vec{r'}) = \frac{\Delta q}{\Delta v} \tag{1.2}$$

Una definición rigurosa requiere un paso al límite en el que los cubitos sean

[5]En el ejemplo consignado observamos que el radio terrestre es aproximadamente $6.400\ km$, mientras que la distancia media Tierra-Sol es $150.000.000$ km.

infinitesimalmente pequeños. Esto es

$$\delta(\vec{r'}) \;=\; \frac{dq}{dv} \;=\; \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \tag{1.3}$$

Esta definición es aplicable a todos los casos reales, y su valor será un escalar que, aunque probablemente muy grande, siempre será finito. Sin embargo, en el mundo de los modelos puede a veces resultar infinito. Un ejemplo de tal situación se tiene para las cargas puntuales. En efecto, la carga toma un valor finito y reside en un soporte de volumen nulo, por lo que la densidad es infinita. Una situación análoga se tiene cuando el soporte de la carga se modela como una curva o como una superficie (objetos geométricos de volumen nulo). En estos últimos casos pueden definirse la **densidad lineal de carga** $\lambda(\vec{r'})$ y la **densidad superficial de carga** $\sigma(\vec{r'})$ dadas por

$$\lambda(\vec{r'_l}) \;=\; \frac{dq}{dl} \;=\; \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \tag{1.4}$$

$$\sigma(\vec{r'_s}) \;=\; \frac{dq}{ds} \;=\; \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} \tag{1.5}$$

donde $\vec{r'_l}$ y Δl representan la posición y el tamaño del elemento de curva donde reside la carga. De la misma manera $\vec{r'_s}$ y Δs representan la posición y tamaño de un elemento de la superficie que contiene la carga. Aquí enfatizamos que tanto las cargas puntuales como las densidades de carga lineales y superficiales solo existen en los modelos, nunca en la realidad física.

1.8. Ley de Coulomb

Considere dos partículas puntuales (en adelante 1 y 2), rígidamente emplazadas en las posiciones $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$, que poseen cargas eléctricas Q_1 y Q_2 respectivamente. Entonces, la partícula 1 ejerce una fuerza eléctrica $\vec{F_{21}}$ sobre la partícula 2 cuyo módulo resulta directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las partículas. La dirección de la fuerza coincide con la recta que pasa por ambas partículas y el sentido será atractivo si las cargas son de distinto signo y repulsivo si son del mismo signo (ver Figura 1.1).

En forma simbólica tenemos

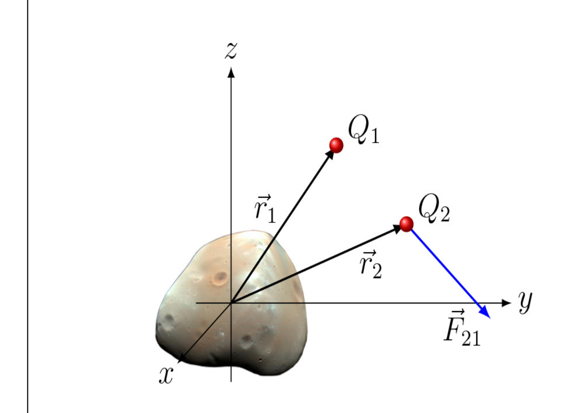


Figura 1.1: El esquema representa un sistema de referencia, representado por el satélite de Marte, Deimos (créditos de la imagen: NASA), sobre el que se ha elegido un origen de coordenadas y se encuentra anclada una terna de ejes. Luego, dos partículas cargadas fijas interactúan eléctricamente de acuerdo con la ley de Coulomb.

$$\vec{F_{21}} = k \; \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \tag{1.6}$$

donde la constante k vale:

$$k = 9 \times 10^9 \; \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2} \tag{1.7}$$

Esta constante se suele denominar **constante electrostática**. En vistas a tratamientos futuros es conveniente introducir una nueva constante ϵ_0, llamada **permitividad del vacío**, relacionada con k de la siguiente manera

$$\epsilon_0 \; = \; \frac{1}{4\pi k} \; = \; 8,842 \times 10^{-12} \; \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2} \tag{1.8}$$

Expresión de bolsillo: algunas veces conviene recordar una expresión más compacta para la ley de Coulomb que se construye a partir de un vector $\vec{u}_{21}$ definido por

$$\vec{u}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{1.9}$$

de donde resulta que

$$u_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad \text{y} \quad \breve{u}_{21} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \tag{1.10}$$

Entonces la forma compacta es

$$\vec{F}_{21} = k \; \frac{Q_1 Q_2}{u_{21}^2} \; \breve{u}_{21} \tag{1.11}$$

1.9. Principio de superposición

La ley de Coulomb describe la interacción electrostática entre dos partículas cargadas. Ahora cabe preguntarse ¿cómo será la interacción cuando participan más de dos partículas? La respuesta proviene de la experiencia y recibe el nombre de **Principio de Superposición**. El mismo puede enunciarse como sigue:

Consideremos N partículas rígidamente emplazadas en posiciones $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N$, con cargas respectivas $Q_1, ..., Q_N$ (ver Figura 1.2). Entonces, la fuerza ejercida sobre la partícula N-ésima por las $N-1$ restantes, es la suma vectorial de las fuerzas que cada una de las partículas restantes ejerce sobre la N-ésima. Esto es

$$\vec{F}_{RN} \; = \; \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}_{Ni} \; = \; k \; \sum_{i=1}^{N-1} \frac{Q_i Q_N}{\left|\vec{r}_N - \vec{r}_i\right|^2} \frac{\vec{r}_N - \vec{r}_i}{\left|\vec{r}_N - \vec{r}_i\right|}, \tag{1.12}$$

donde $\vec{F}_{RN}$ representa la fuerza resultante sobre la N-ésima partícula.

Tal vez algún lector pueda pensar que este principio es trivial. Si este fuera el caso, invitamos al lector a que reflexione sobre otros hechos naturales en los que seguramente no esperaría que la respuesta fuera una simple suma. Por ejemplo si en un día cuya temperatura es de 25° C uno admite una sensación térmica confortable, seguramente no creerá que en un día de 50° C la sensación térmica será doblemente confortable. En otras palabras (algo menos elocuentes), decimos que la Naturaleza no responde necesariamente en forma lineal. En tal sentido, el Principio de Superposición es un obsequio muy apreciable de la Naturaleza, especialmente para los que intentamos comprender y describir sus fenómenos desde modestos modelos lógicos.

La ley de Coulomb y el Principio de Superposición constituyen la base formal de la electrostática. Esto signfica que los hechos que ocurren en el marco electrostático pueden ser descriptos a partir de estas leyes. Naturalmente, ciertos fenómenos pueden visualizarse mejor mediante leyes más apropiadas. Sin embargo, tales leyes deben poder deducirse desde la base formal propuesta.

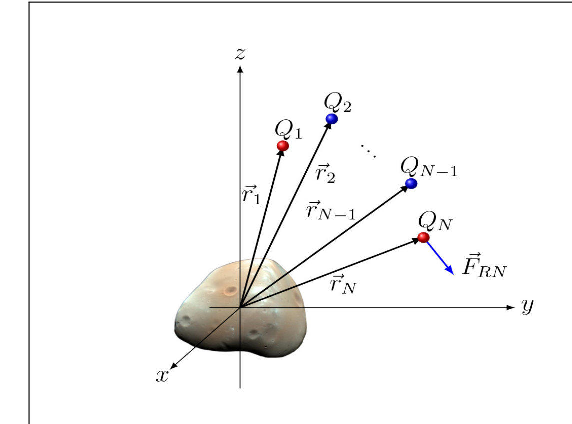


Figura 1.2: En el esquema indicamos las notaciones de cargas y sus respectivas posiciones para interpretar el Principio de Superposición, en distribuciones discretas. Note que utilizamos el mismo ícono que en la Figura 1.1 para representar el sistema de referencia y la terna de ejes, interpretación que seguiremos usando en todo el curso.

1.10. Ejemplo 1

En este ejemplo presentamos una situación muy simple, que admite ser tratada en el plano. Se trata de tres partículas con cargas especificadas, que se encuentran emplazadas de acuerdo con el esquema $a)$ de la Figura 1.3. La consigna será establecer la fuerza resultante sobre la partícula de carga $-10\,\mu$C, debida a la interacción electrostática con las otras dos partículas.

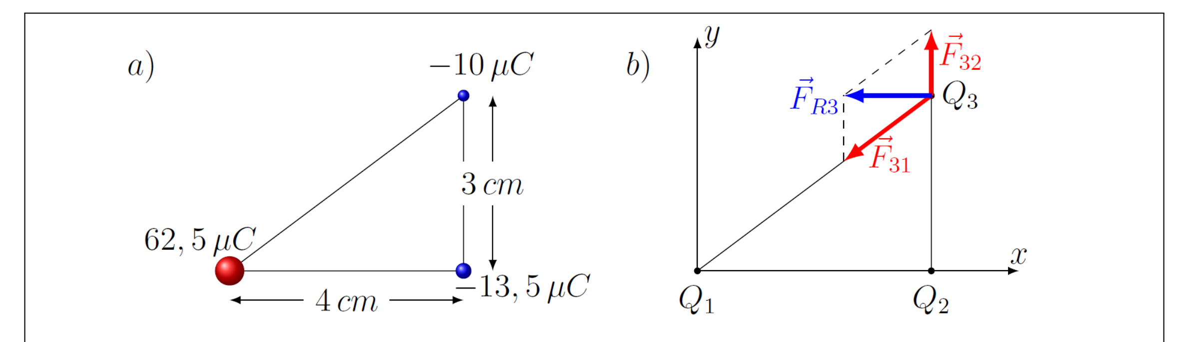


Figura 1.3: a) Esquema de las partículas interactuantes y sus localizaciones relativas. b) Esquema del mismo montaje, incluyendo el sistema de ejes elegido, y la resolución gráfica de la fuerza sobre la partícula 3.

En primer lugar elegimos una notación adecuada para las cargas, sus posiciones respectivas y las fuerzas de interacción. Además elegimos el origen y orientación del sistema de coordenadas. Todo esto se indica en el esquema $b)$, y es consistente con el siguiente resumen

$$\begin{array}{rclcrcl} Q_1 & = & 62,5\ \mu\text{C} & \quad & \vec{r}_1 & = & (0\ ,\ 0) \\ Q_2 & = & -13,5\ \mu\text{C} & \quad & \vec{r}_2 & = & (4\ \text{cm},\ 0) \\ Q_3 & = & -10\ \mu\text{C} & \quad & \vec{r}_3 & = & (4\ \text{cm},\ 3\ \text{cm}) \end{array} \tag{1.13}$$

De acuerdo con la expresión (1.12), la fuerza $\vec{F}_{R3}$ será

$$\vec{F}_{R3} \;=\; k\,\frac{Q_3\,Q_1}{|\,\vec{r}_3-\vec{r}_1\,|^2}\,\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_1}{|\,\vec{r}_3-\vec{r}_1\,|} \;+\; k\,\frac{Q_3\,Q_2}{|\,\vec{r}_3-\vec{r}_2\,|^2}\,\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{|\,\vec{r}_3-\vec{r}_2\,|} \tag{1.14}$$

Calculemos los vectores, módulos y versores involucrados en esta expresión

$$\begin{array}{ll} \vec{r}_3-\vec{r}_1 \;=\; (4\text{ cm},\ 3\text{ cm}) & |\,\vec{r}_3-\vec{r}_1\,| \;=\; 5\text{ cm} \\ \vec{r}_3-\vec{r}_2 \;=\; (0\ ,\ 3\text{ cm}) & |\,\vec{r}_3-\vec{r}_2\,| \;=\; 3\text{ cm} \end{array} \tag{1.15}$$

Estamos en condiciones de calcular los versores

$$\frac{\vec{r}_3-\vec{r}_1}{|\,\vec{r}_3-\vec{r}_1\,|} \;=\; \left(\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5}\right); \qquad \frac{\vec{r}_3-\vec{r}_2}{|\,\vec{r}_3-\vec{r}_2\,|} \;=\; (\,0\ ,\ 1\,) \tag{1.16}$$

Reemplazando en (1.14) tenemos

$$\begin{array}{rl} \vec{F}_{R3} \;=\; 9\times10^{9}\,\dfrac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\,\dfrac{-10\times10^{-6}\text{ C}\ 62,5\times10^{-6}\text{ C}}{25\times10^{-4}\text{ m}^2}\,\left(\dfrac{4}{5}\ ,\ \dfrac{3}{5}\right) \;+ & \\ +\;9\times10^{9}\,\dfrac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}\,\dfrac{-10\times10^{-6}\text{ C}\ \left(-13,5\times10^{-6}\text{ C}\right)}{9\times10^{-4}\text{ m}^2}\,(\,0\ ,\ 1\,) & \end{array} \tag{1.17}$$

Realizamos las cuentas con cuidado y verificamos las unidades:

$$\vec{F}_{R3} \;=\; -2250\text{ N}\,\left(\frac{4}{5}\ ,\ \frac{3}{5}\right) \;+\; 1350\text{ N}\,(\,0\ ,\ 1\,) \tag{1.18}$$

Finalmente, recordamos las definiciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector. Entonces tenemos

$$\vec{F}_{R3} \;=\; (\,-1800\text{ N},\ -1350\text{ N}\,) \;+\; (\,0\ ,\ 1350\text{ N}\,) \tag{1.19}$$

con lo que concluimos que

$$\vec{F}_{R3} \;=\; (\,-1800\text{ N},\ 0\,) \tag{1.20}$$

Analicemos brevemente este resultado. En primer lugar, observemos que la con-

signa era determinar una fuerza, y el resultado es un vector (como era de esperarse), cuyas componentes tienen la unidad correcta. Luego observemos que el análisis gráfico de las fuerzas en el esquema $b)$ (que está hecho a escala) concuerda con el resultado obtenido. En efecto, la fuerza $\vec{F}_{R3}$ tiene componente vertical nula, y componente horizontal negativa.

1.11. Ejemplo 2

Para ilustrar la forma de operar con vectores en casos tridimensionales, consideremos cuatro partículas con igual carga Q, situadas en los vértices de un tetraedro regular de lado a (ver Figura 1.4). Comencemos por elegir el origen de coordenadas en el centro de una cara. El eje x paralelo a uno de los lados de esa cara y el eje z pasando por la partícula situada en el vértice opuesto a la cara que contiene al origen. Entonces, las posiciones de las partículas serán:

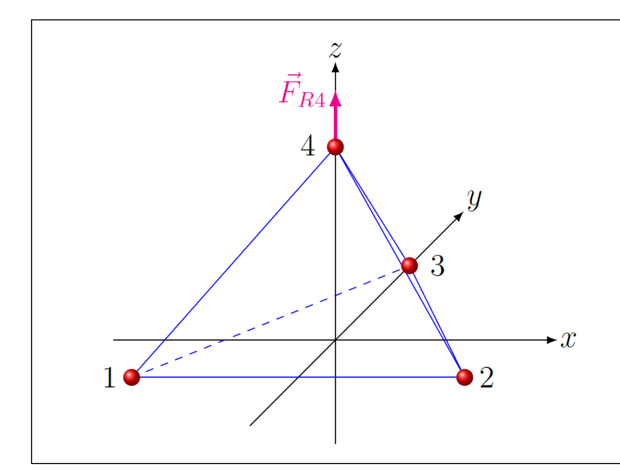


Figura 1.4: Ejemplo 2. Cuatro partículas con igual carga dispuestas en los vértices de tetraedro regular. En la figura se muestra la fuerza sobre una de las partículas ejercida por las tres restantes.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \left(-\frac{1}{2}\,a\,,-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,a\,,\,0\right) & \vec{r}_2 &= \left(\frac{1}{2}\,a\,,-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,a\,,\,0\right) \\ \vec{r}_3 &= \left(0\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,a\,,\,0\right) & \vec{r}_4 &= \left(0\,,\,0\,,\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,a\right) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Nos proponemos encontrar la fuerza $\vec{F}_{R4}$ resultante sobre la partícula 4, debida a la interacción con las otras tres partículas. Formalmente será

$$\vec{F}_{R4} = \frac{kQ_1Q_4}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_1\ |^2}\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_1\ |} + \frac{kQ_2Q_4}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_2\ |^2}\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_2\ |} + \frac{kQ_3Q_4}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_3\ |^2}\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_3\ |} \tag{1.22}$$

Los vectores diferencia involucrados en la expresión de la fuerza son

$$\begin{aligned}
\vec{r}_4 - \vec{r}_1 &= \left(\frac{1}{2}\,a\,, \frac{1}{2\sqrt{3}}\,a\,,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,a\right) & |\ \vec{r}_4 - \vec{r}_1\ | &= a \\
\vec{r}_4 - \vec{r}_2 &= \left(-\frac{1}{2}\,a\,, \frac{1}{2\sqrt{3}}\,a\,,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,a\right) & |\ \vec{r}_4 - \vec{r}_2\ | &= a \\
\vec{r}_4 - \vec{r}_3 &= \left(0\,,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\,a\,,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,a\right) & |\ \vec{r}_4 - \vec{r}_3\ | &= a
\end{aligned} \tag{1.23}$$

con lo que los versores toman la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_1\ |} &= \left(\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2\sqrt{3}}\,,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\
\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_2\ |} &= \left(-\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2\sqrt{3}}\,,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\
\frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{|\ \vec{r}_4 - \vec{r}_3\ |} &= \left(0\,,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Como todas las cargas son iguales, y las distancias involucradas también, tenemos que

$$\vec{F}_{R4} = \frac{kQ^2}{a^2}\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \left(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right] \tag{1.25}$$

Sumando componente a componente tenemos

$$\vec{F}_{R4} = \frac{kQ^2}{a^2}\left(0\,,\ 0\,,\ 3\,\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \tag{1.26}$$

Con lo que obtenemos el vector buscado

$$\vec{F}_{R4} = \left(0 \, , \, 0 \, , \, \sqrt{6} \, \frac{kQ^2}{a^2} \right) \tag{1.27}$$

En este ejemplo, puede ocurrir que algún estudiante considere que el procedimiento es “algo" tedioso. La idea es que no se desanime, porque muchas veces ocurre que ciertas propiedades geométricas y/o físicas permiten atajos que facilitan la resolución. Así fue pensado este ejemplo, para que pueda resolverse mediante estrategias alternativas. En este curso, alentaremos siempre al estudiante a que desarrolle tales alternativas de resolución. La clave está en que siempre podemos apartarnos de la “formalidad", pero sin perder de vista la “rigurosidad conceptual".

1.12. Nota: Partículas cargadas en movimiento

Según hemos discutido, la electrostática funciona siempre que las partículas cargadas se encuentren en reposo. Veremos más adelante que cuando las partículas cargadas se mueven, aparecen las interacciones magnéticas. Sin embargo, muchos fenómenos que involucran movimiento de cargas, pueden ser tratados mediante las herramientas de la electrostática. Todo es cuestión de mantenerse dentro del límite de bajas velocidades.

Desarrollemos un ejemplo. Una partícula con carga Q se encuentra firmemente anclada, mientras que otra partícula de carga q y masa m se abandona a una distancia r_0 de la primera (ver Figura 1.5). Nos proponemos calcular la velocidad de la segunda partícula como función de la distancia a la primera. Para ello, elegimos el origen de coordenadas en el sitio donde se encuentra la partícula fija.

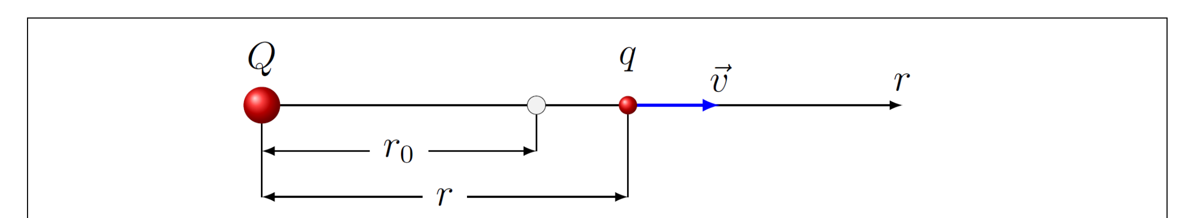


Figura 1.5: Esquema para analizar el movimiento de una partícula de carga q, bajo la influencia de otra de carga Q fija en el origen. La partícula libre de moverse se ubica inicialmente en la posición r_0, y un tiempo después se encuentra en la posición r.

Dado que el movimiento se inicia desde el reposo, la trayectoria será necesa-

riamente recta (trate el lector de explicar por qué). Entonces el problema puede tratarse en una dimensión (ver Figura 1.5). De la segunda ley de Newton tenemos

$$\vec{F} = \frac{kQq}{r^2}\,\breve{r} \;=\; m\vec{a} \;=\; m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; m\,\frac{dv_r}{dt}\,\breve{r} \tag{1.28}$$

que se convierte en la ecuación escalar siguiente

$$\frac{kQq}{r^2} \;=\; m\,\frac{dv_r}{dt} \;=\; m\,\frac{dv_r}{dr}\,\frac{dr}{dt} \;=\; mv_r\,\frac{dv_r}{dr} \tag{1.29}$$

Esta es una ecuación diferencial de fácil resolución

$$kQq\,\frac{dr}{r^2} \;=\; mv_r\,dv_r \tag{1.30}$$

Integramos ambos miembros reconociendo que la posición inicial es r_0 y la velocidad inicial es nula

$$kQq\,\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2} \;=\; m\,\int_0^{v_r} v'_r\,dv'_r \tag{1.31}$$

de donde resulta que

$$kQq\,\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \;=\; m\,\frac{v_r^2}{2} \tag{1.32}$$

Finalmente tenemos

$$v_r^2\,(r) \;=\; \frac{2kQq\,(r - r_0)}{mr_0 r} \tag{1.33}$$

En este análisis se ha perdido información sobre el signo de la componente de velocidad v_r. Como el primer miembro es definido positivo, los signos de Q, q y $r - r_0$ deben ser tales que su producto resulte positivo. Esto condiciona el sentido de la velocidad, por lo que el vector velocidad debe escribirse cuidadosamente:

$$\vec{v}\,(\vec{r}) \;=\; v_r\,(r)\;\breve{r} \;=\; signo\,(r - r_0)\;\sqrt{\frac{2kQq\,(r - r_0)}{mr_0 r}}\;\breve{r} \tag{1.34}$$

Este resultado ha sido obtenido a partir de suponer que la partícula de carga q es afectada exclusivamente por la fuerza que la carga Q hace sobre ella. El resultado es correcto, aunque las condiciones electrostáticas no se cumplen. Entonces ¿cómo decidir si se puede usar o no la fuerza eléctrica para analizar estos movimientos? En realidad no estamos aún en condiciones de discutir esto, pero podemos adelantar que si hay solo una partícula libre de moverse bajo la acción de otras fijas, entonces el tratamiento es válido siempre que las velocidades sean relativamente bajas. A lo largo del curso avanzaremos sobre estos conceptos en busca de su debida fundamentación.

1.13. Problemas

1. Utilice la expresión completa de la ley de Coulomb para establecer la fuerza que ejerce una partícula de carga $Q_1 = 30\,\mu$C situada en la posición $(1.2, 0.4, -2.2)$ mm, sobre otra de carga $Q_2 = -15\,\mu$C situada en $(0, -1.4, 2.5)$ mm. Como ayuda, recuerde que el resultado debe ser un vector de la forma

   $$\vec{F}_{21} = (?, ?, ?) \text{ N}$$

   donde los símbolos "?" deben reemplazarse por constantes.

2. En ciertas circunstancias podemos estar interesados en calcular el módulo de la fuerza ejercida entre dos partículas cargadas, en cuyo caso puede deducirse de la expresión general de la ley de Coulomb la siguiente forma simplificada

   $$F_{21} = \frac{k\;|Q_1|\;|Q_2|}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^2}$$

   donde F_{21} representa el módulo del vector $\vec{F_{21}}$, mientras que $|Q_1|$ y $|Q_2|$ representan los valores absolutos de las cargas respectivas.
   ¿Cuál será la distancia entre dos partículas puntuales cuyas cargas son de $-1,48\,\mu$C y $+3,12\,\mu$C, si el módulo de la fuerza electrostática entre ellas es de 5 N? ¿Podría especular acerca de si la fuerza es atractiva o repulsiva?

3. En un dado sistema de coordenadas, dos cargas se encuentran situadas sobre el eje x. La carga positiva $q_1 = 15\,\mu$C está ubicada en $x = 2$ cm, mientras que la carga positiva $q_2 = 6\,\mu$C se encuentra en el origen.

   a) Hallar la fuerza (módulo, dirección y sentido) que ejerce q_1 sobre q_2.

   b) ¿En qué posición sobre el eje x debe colocarse una carga negativa q_3 de modo tal que la fuerza neta sobre ella sea cero? ¿Depende el resultado del valor de q_3?

   c) Una vez colocada esta tercera carga, y suponiendo que tiene un valor $q_3 = -2\,\mu$C, ¿cuánto vale la fuerza neta sobre q_1? ¿Y la fuerza sobre q_2?

4. Algunos datos sobre partículas subatómicas: la unidad elemental de carga eléctrica en la naturaleza vale $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C; los electrones tienen carga $-e$ y los protones tienen carga $+e$. La masa del electrón es $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ Kg y la del protón es $1,839$ veces mayor. Esto es: $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ Kg.
   El módulo de la fuerza electrostática ejercida entre dos iones positivos idénticos es de $3,7 \times 10^{-9}$ N, cuando los mismos están separados una distancia de 5×10^{-10} m.

   a) Halle la carga de cada ión.

   b) Suponiendo que los iones han sido producidos a partir de átomos neutros, ¿Cuántos electrones han sido sustraídos para producir cada ión?

c) ¿En qué factor se incrementaría el módulo de la fuerza entre los iones, si la distancia entre ellos disminuyera a la mitad?

5. Suponga que dos electrones se encuentran en posiciones fijas de modo que la distancia entre ellos es D. En estas condiciones, experimentan interacciones tanto eléctricas como gravitatorias. Determine cuántas veces mayor resulta una respecto de la otra (recuerde que la constante de gravitación universal es $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}Kg^{-2}).

6. Evaluando órdenes de magnitud.
   Es bien sabido que cuando dos cargas puntuales idénticas se encuentran próximas, se repelen. Un caso práctico que admite esta modelización podría ser el de dos esferas pequeñas (digamos de 1 cm^3 de volumen), cada una de las cuales posee una carga positiva de 1C. Para evitar el alejamiento por repulsión electrostática entre las esferas, se las ata mediante una cuerda de 1m de largo.

   a) Calcule la tensión de la cuerda.

   b) Si las esferas fueran por ejemplo de aluminio, la distancia entre átomos es de 1 Angstrom (Å), que equivale a 10^{-10} m. Para cargar positivamente las esferas, se le podrían extraer electrones libres (cada átomo aporta uno de estos electrones). Con este sistema, ¿cuál será la carga máxima que podrá adquirir cada esfera? Discuta el resultado.

7. Dos diminutas esferas idénticas de masa $m = 11{,}2$ g cuelgan de un mismo punto del techo mediante hilos de seda de igual longitud $L = 122$ cm. Las esferas poseen cargas iguales de magnitud Q, relativamente pequeñas, de modo tal que la separación por repulsión electrostática sea mucho menor que la longitud de los hilos.

   a) Bajo las condiciones mencionadas, demuestre que la distancia D entre las esferas en el equilibrio viene dada por

$$D = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 m g} \right)^{1/3}$$

   b) Si la separación es $D = 4{,}7$ cm, ¿Cuál será el valor de la carga Q?

   c) ¿Cómo debiera tratarse el problema, si las cargas fueran mucho mayores que la calculada? Discuta y busque una expresión general.

8. Dos partículas cuyas cargas son Q_0 y $-3Q_0$ se encuentran separadas una distancia L. Pueden moverse libremente, pero no lo hacen porque cerca de ellas se encuentra una tercera partícula cargada.

   a) Encuentre la posición de dicha partícula y su carga, en términos de las constantes Q_0 y L.

b) Determine la fuerza neta sobre la tercera partícula.

c) ¿Será estable el equilibrio del sistema completo? Justifique.

9. Considere tres resortes iguales de longitud natural $l = 15$ cm y constante $K = 2$ N/m. Tres pequeñas esferas idénticas e igualmente cargadas se fijan respectivamente en un extremo de cada resorte. Los extremos libres de los resortes se unen entre sí y el montaje se deja sobre una mesa horizontal hasta que alcanza el equilibrio electrostático. En tales condiciones se observa que los resortes están igualmente estirados y sus longitudes alcanzan los 17 cm. Determine la carga de cada esfera.

   Ayuda: Recuerde que un resorte estirado satisface que la componente de fuerza hecha por él en la dirección del estiramiento es proporcional al estiramiento; es decir $F_x = -Kx$.

10. Cuatro partículas igualmente cargadas se encuentran en los vértices de un tetraedro regular, cuyas aristas miden $1,5$ cm. Si el módulo de la fuerza eléctrica que actúa sobre cada partícula es $F = 50$ N, determine la carga de cada partícula.

11. Un modelo muy simple de átomo de hidrógeno consiste en suponer que el electrón gira alrededor del protón en una órbita circular a expensas de la interacción electrostática. De especulaciones teóricas debidas a Niels Bohr, se sabe que el radio de cierta órbita es de $0,528 \times 10^{-10}$ m. Determine la fuerza electrostática sobre el electrón, su velocidad tangencial y su frecuencia de rotación.
    Observe que la fuerza y la velocidad tangencial deben especificarse como vectores de la forma:

$$\vec{F_{ep}} = (\,??\,,\,??\,,\,??\,)$$
$$\vec{v} = (\,??\,,\,??\,,\,??\,)$$

    donde los símbolos $??$ deben reemplazarse por funciones del tiempo.

12. Dos partículas igualmente cargadas separadas 3 mm, se liberan en reposo. Se observa que los módulos de las aceleraciones iniciales son respectivamente $a_1 = 10$ m/s^2 y $a_2 = 20$ m/s^2. La masa de la primera partícula es $m_1 = 6,31 \times 10^{-7}$ Kg.

    a) Determine la masa de la segunda partícula.

    b) Determine la carga de cada partícula.

    c) ¿Qué puede decir acerca del signo de las cargas? ¿Y de las orientaciones relativas de los vectores aceleración $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$?

13. Considere el sistema formado por dos partículas liberadas en reposo, cuando la distancia entre ellas es L. Las cargas de las partículas son q y Q, y sus masas respectivas son m y M (con $M >> m$). Determine la velocidad de la partícula de menor masa, cuando la distancia entre ambas partículas es x. Analice los casos en que ambas cargas tienen el mismo signo o signos contrarios.

Capítulo 2
Campo electrostático

2.1. Carga de prueba

Para desarrollar esta idea, comenzamos por considerar una distribución de carga en equilibrio sobre sus portadores macroscópicos. Esto implica que sobre cada elemento de carga, la fuerza neta es nula. Reflexionemos brevemente sobre esta idea. En ciertos casos, podríamos pensar que las cargas están rígidamente emplazadas en sus posiciones mediante vínculos muy resistentes (imaginemos partículas sostenidas por una estructura mecánica rígida). Pero otras veces, las cargas pueden estar en reposo pero no bloqueadas, es decir que se mantienen en equilibrio estable entre sus propias interacciones y las que experimentan con el soporte mecánico (que no las inmoviliza a priori).

Ahora supongamos que un pequeño objeto cargado se acerca al sistema. La nueva interacción tiene dos consecuencias:

- Sobre el nuevo objeto aparece una fuerza electrostática debida al sistema de cargas preexistente. Por tanto, para que el objeto se mantenga en el lugar, necesita que un agente externo lo sostenga.
- Sobre el sistema preexistente aparecerán fuerzas debidas al nuevo objeto, que alterarán el equilibrio original. Si la carga del sistema posee ligaduras no rígidas, habrá un reordenamiento de cargas tendiente a restablecer el equilibrio electrostático.

Un efecto muy buscado en el vasto universo de las técnicas de medición, consiste en *observar algo sin que el sistema a estudiar sea perturbado*. En lo que respecta a nuestro análisis, podríamos decir que nos interesa observar *alguna fuerza* sobre el objeto esperando que el sistema original experimente la menor alteración posible. Naturalmente, esto ocurre cuando la carga del objeto es lo más pequeña posible. Por supuesto que el límite de qué tan pequeña puede ser

la carga, lo impone la sensibilidad del instrumento que mide la fuerza sobre ella. Si un objeto pequeño dotado de carga eléctrica es apto para tal propósito, decimos que el mismo es un *objeto de prueba*, y usualmente lo llamamos **carga de prueba**.

2.2. Concepto de campo electrostático

Con la ayuda de una carga de prueba, podemos explorar el espacio circundante de cierta distribución de carga estática. Entonces observaremos que sobre la carga de prueba aparecerán fuerzas distintas según cambie su posición. Una mirada posible sobre esto, consiste en interpretar que *el espacio posee una propiedad conferida por la distribución de cargas, la cual se manifiesta actuando sobre la carga de prueba, dando lugar a la fuerza que actúa sobre ella*. A esta propiedad del espacio se la llama **campo electrostático**, y se dice que las cargas que lo originan son sus **fuentes**. Para independizar la propiedad de la carga de prueba que la detecta, definimos el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto $\vec{r}$, como el cociente entre la fuerza electrostática $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula de prueba y su propia carga, cuando la misma se sitúa en el punto $\vec{r}$. Esto es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\frac{\vec{F}}{q}\right]_{(\vec{r})} \tag{2.1}$$

Ahora bien, de acuerdo con la forma en que funcionan las cargas de prueba, es esperable que influyan indirectamente sobre el campo electrostático. Esto es, la carga de prueba alterará la distribución de cargas que da origen al campo. Entonces el campo medido de esta manera será siempre un campo alterado por la medición. Pero entonces ¿será posible obtener el campo producido por la distribución de carga, libre de perturbaciones? Al menos, desde el punto de vista teórico, podemos definirlo. Imaginemos una secuencia de mediciones reemplazando en un mismo punto cargas de prueba cada vez más pequeñas. En el límite en que el valor de la carga de prueba tiende a cero, el sistema de cargas vuelve a su equilibrio original. Entonces una definición adecuada para el campo electrostático producido por la distribución no perturbada será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}\right]_{(\vec{r})} \tag{2.2}$$

Volvamos ahora a la idea de que el campo electrostático es una propiedad del

espacio. ¿Cómo podríamos imaginarnos esto? En realidad, nosotros estamos familiarizados con propiedades de este tipo. A veces estamos tan familiarizados que ni siquiera nos damos cuenta. Tal es el caso de la propiedad gravitatoria que *tiene* el espacio en que vivimos, a la que denominamos **campo gravitatorio**. Podríamos decir que esta propiedad es la que nos mantiene pegados al piso, la que hace que los líquidos tengan una superficie horizontal y que cualquier objeto abandonado sin soporte mécanico se caiga. En cierto sentido, podríamos decir que el espacio está afectado por una *propiedad acechante* que afecta a todo objeto material que se encuentre bajo su influencia. Por otra parte, el campo gravitatorio debe ser representado mediante vectores, dado que sus efectos (fuerzas ejercidas sobre los objetos materiales) poseen dirección y sentido.

El campo electrostático admite una representación análoga, donde el efecto se observa sobre los objetos que poseen carga eléctrica. Aquí nuevamente el espacio puede imaginarse como erizado de vectores al acecho[1], que esperan un objeto cargado para ejercer su influencia.

2.3. Líneas de campo

Consideremos un campo vectorial genérico $\vec{A}(\vec{r})$ que se extiende sobre cierta región del espacio. Definimos una **línea de campo** como la curva que resulta tangente al vector campo $\vec{A}(\vec{r})$ en toda su extensión. Estas curvas responden al sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \tag{2.3}$$

Las líneas de campo cumplen las siguientes propiedades:

- En cada punto del espacio en que el vector campo es no nulo, pasa una y solo una línea de campo. De esto puede concluirse que las líneas de campo no se cortan ni se bifurcan, con la posible excepción de los puntos en que el campo es nulo.
- En cualquier región volumétrica del espacio en la que el campo es no nulo, la cantidad de líneas de campo que atraviesan la región es infinita.

En particular, cuando consideramos el campo electrostático, pueden definirse las líneas de campo electrostático como:

[1]Esta frase poco formal, aunque altamente elocuente fue tomada del Dr. Alsina Fuentes en su obra “El mundo de la mecánica".

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \tag{2.4}$$

que, por supuesto cumplen con las propiedades generales anteriores. Las ecuaciones diferenciales que definen la curva, resultan en general inabordables en forma analítica. Por tal razón suelen ser determinadas en forma numérica.

Consideremos como ejemplo el caso de dos hilos infinitos, paralelos, cargados con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$. En la Figura 2.1 se muestra un corte de un plano perpendicular a los hilos, en los que se muestran las líneas de campo.

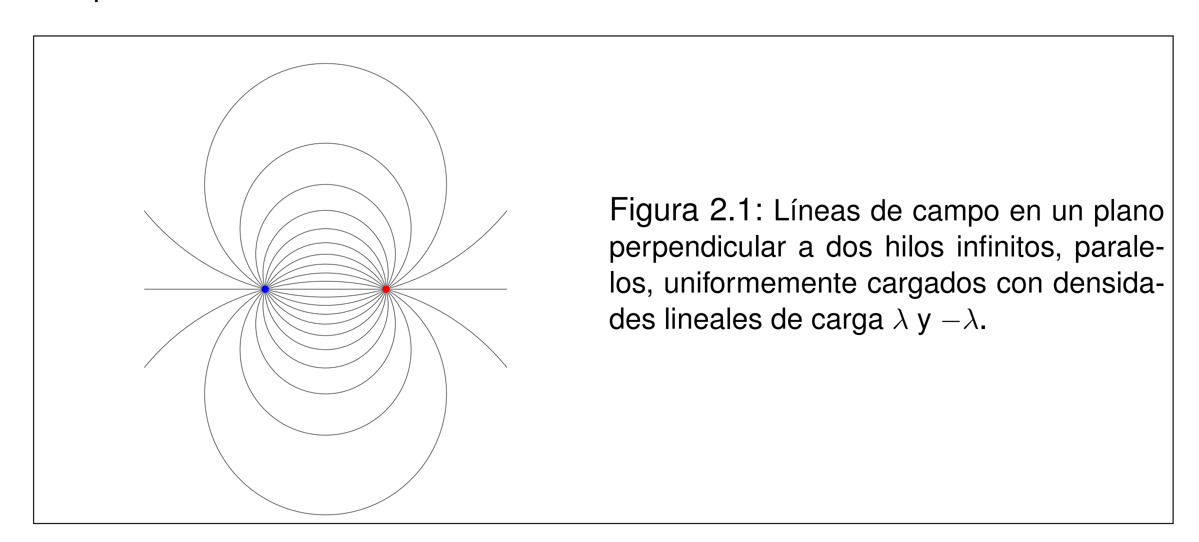


Figura 2.1: Líneas de campo en un plano perpendicular a dos hilos infinitos, paralelos, uniformemente cargados con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$.

2.4. Campo electrostático de una carga puntual

La ley de Coulomb provee todo lo necesario para derivar el campo electrostático producido por una carga puntual. Supongamos que cierta partícula de carga Q se encuentra rígidamente anclada en la posición $\vec{r'}$, y una partícula de prueba con carga q se sitúa en la posición $\vec{r}$ donde se quiere determinar el campo (ver Figura 2.2). Entonces la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula de prueba será:

$$\vec{F} = k \, \frac{Qq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{2.5}$$

Observando la definición (2.2), concluimos que el campo electrostático producido por la carga puntual Q es:

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; \frac{kQ}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{2.6}$$

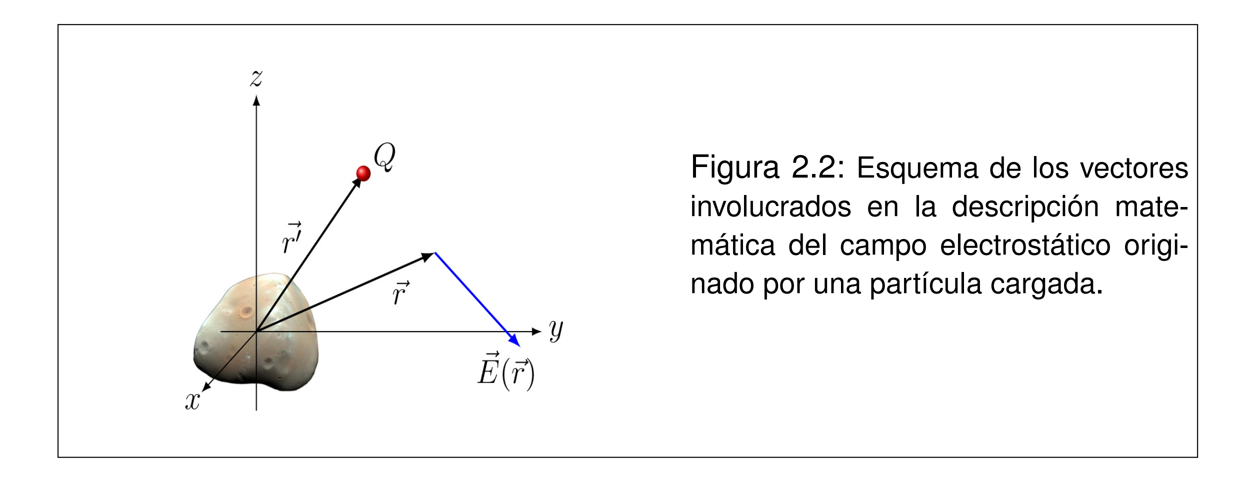


Figura 2.2: Esquema de los vectores involucrados en la descripción matemática del campo electrostático originado por una partícula cargada.

El estudiante podrá objetar que no se ha tratado cuidadosamente el límite que aparece en la definición (2.2). Sin embargo, no hay problemas, dado que hemos tenido la precaución de considerar a la partícula fuente del campo “rígidamente" anclada. Por lo tanto, cualquiera sea el tamaño de la carga de prueba q, no alterará la localización de la fuente.

Precisemos algunos conceptos. Como ya adelantamos, a las cargas que originan el campo se las llama fuentes. Pero dado que las cargas eléctricas son magnitudes escalares, también se las suele referir como “fuentes escalares". Además, a las posiciones $\vec{r'}$ y $\vec{r}$ se las llama **punto fuente** y **punto campo** respectivamente. Esta terminología no es, en principio, tan habitual, pero conviene ir acostumbrándose a ella.

2.5. Campo electrostático de un sistema de partículas cargadas

El Principio de Superposición aporta la manera de extender el resultado (2.6) para el caso de un sistema de partículas cargadas. El campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en un punto $\vec{r}$ será simplemente la suma vectorial de las contribuciones de cada partícula. Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ las cargas de N partículas situadas en posiciones $\vec{r'}_1, \vec{r'}_2, ..., \vec{r'}_N$ respectivamente (ver Figura 2.3). Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{kQ_i}{|\vec{r} - \vec{r'}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r'}_i}{|\vec{r} - \vec{r'}_i|} \tag{2.7}$$

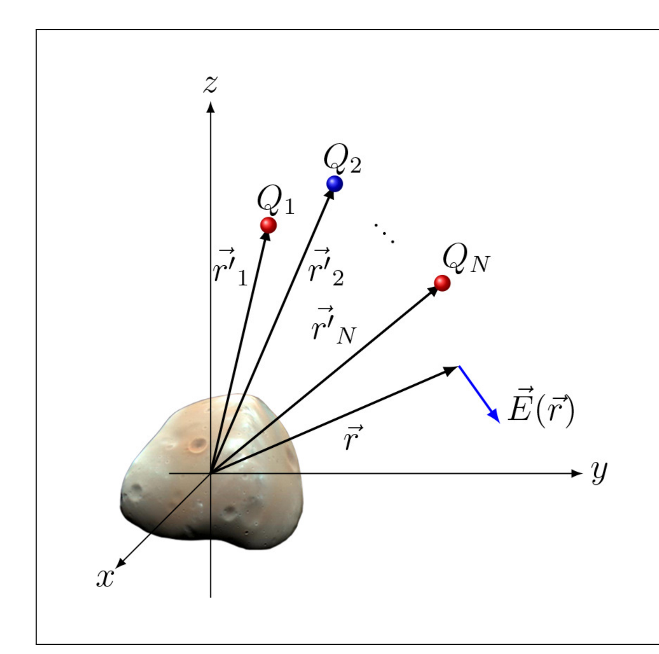


Figura 2.3: Esquema de los vectores involucrados en la descripción matemática del campo electrostático originado por un sistema de partículas cargadas.

2.6. Campo electrostático de distribuciones de carga continuas

La ley de Coulomb y el Principio de Superposición también conducen a una expresión muy compacta para calcular campos electrostáticos producidos por distribuciones continuas de carga. Consideremos un sustrato material cuyos puntos forman el dominio D (ver Figura 2.4). Supongamos que en cada fracción elemental de dicho dominio reside una carga eléctrica dQ cuya localización se representa por $\vec{r'}$ (punto fuente). Entonces el campo electrostático $\vec{E}$ en una posición $\vec{r}$ (punto campo) será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_D \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{2.8}$$

Aquí es posible introducir una versión más compacta de la integral, usando las definiciones siguientes:

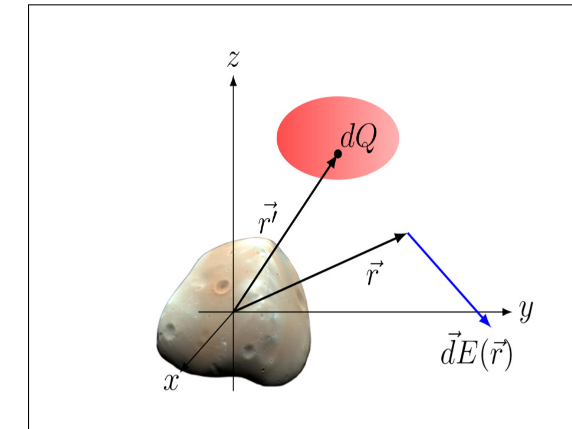


Figura 2.4: Esquema de los vectores involucrados en la descripción matemática del campo electrostático originado por una distribución de carga continua.

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r'} \qquad u = |\vec{r} - \vec{r'}| \qquad \breve{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{2.9}$$

Entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_D \frac{dQ}{u^2}\, \breve{u} \tag{2.10}$$

El dominio D puede ser una curva, una superficie o un volumen. Observe que dependiendo de los casos, dq debe reemplazarse en función de la densidad correspondiente. Esto es:

I. Si D es una curva: $dQ = \lambda dl$, donde λ es una densidad lineal de carga.

II. Si D es una superficie: $dQ = \sigma ds$, donde σ es una densidad superficial de carga.

III. Si D es un volumen: $dQ = \delta dv$, donde δ es una densidad volumétrica de carga.

2.7. Ejemplos

2.7.1. Ejemplo 1: Campo electrostático de un dipolo

Un dipolo eléctrico admite ser modelado como dos partículas puntuales con cargas de igual valor absoluto y distinto signo, emplazadas rígidamente de modo

que la distancia entre ellas se mantenga fija. Eligiendo un sistema de coordenadas adecuado, supongamos que las cargas son $-Q$ y Q y sus posiciones respectivas son $(0, 0, -a/2)$ y $(0, 0, a/2)$ (ver Figura 2.5).

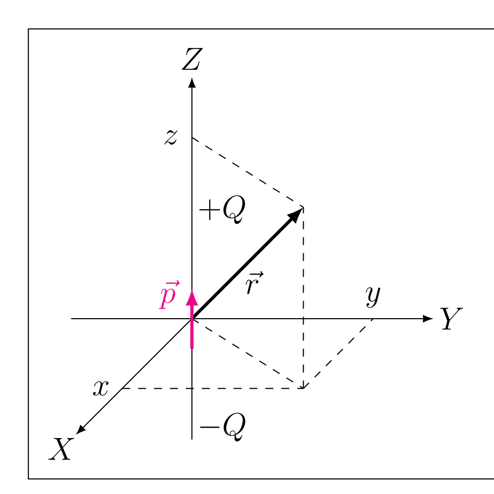


Figura 2.5: Esquema de un dipolo y el sistema de ejes utilizados en la resolución. Además se indica un vector que caracteriza un punto genérico del espacio, donde queremos calcular el campo electrostático.

Entonces, el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ puede calcularse por superposición de las contribuciones de ambas cargas:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{k\,(-Q)\left(x, y, z + \frac{a}{2}\right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \;+\; \frac{kQ\left(x, y, z - \frac{a}{2}\right)}{\left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{2.11}$$

Con esto el problema puede considerarse formalmente resuelto. Sin embargo, resulta de interés analizar el campo detectado por un observador lejano. Para el modo en que fue planteado el problema, la condición resulta:

$$a << r \quad \rightarrow \quad \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} << 1 \tag{2.12}$$

Es conveniente introducir un vector $\vec{a}$ con las siguientes características:

$$\vec{a} \;=\; (0, 0, a) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \left(0, 0, -\frac{a}{2}\right) \;=\; -\frac{1}{2}\,\vec{a} \\ \left(0, 0, \frac{a}{2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\,\vec{a} \end{cases} \tag{2.13}$$

Comencemos por desarrollar la expresión exacta del campo para reconocer tér-

minos despreciables.

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; -\frac{kQ\left(\vec{r}+\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2+az+\dfrac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \;+\; \frac{kQ\left(\vec{r}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2-az+\dfrac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \quad (2.14)$$

Los términos que contienen a^2 son muy pequeños en el contexto en que se encuentran, por lo que cabe despreciarlos

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; -\frac{kQ\left(\vec{r}+\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)}{\left(r^2+az\right)^{3/2}} \;+\; \frac{kQ\left(\vec{r}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)}{\left(r^2-az\right)^{3/2}} \quad (2.15)$$

La siguiente operación pone los denominadores en formas adecuadas para realizar aproximaciones:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; -\frac{kQ\left(\vec{r}+\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)}{r^3\;\left(1+\dfrac{az}{r^2}\right)^{3/2}} \;+\; \frac{kQ\left(\vec{r}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)}{r^3\;\left(1-\dfrac{az}{r^2}\right)^{3/2}} \quad (2.16)$$

Las dos expresiones que siguen muestran aproximaciones usuales, que corresponden a desarrollos en series de Taylor truncados a primer orden:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{kQ}{r^3}\;\left[\frac{-\vec{r}-\frac{1}{2}\,\vec{a}}{1+\dfrac{3az}{2r^2}} \;+\; \frac{\vec{r}-\dfrac{1}{2}\,\vec{a}}{1-\dfrac{3az}{2r^2}}\right] \quad (2.17)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{kQ}{r^3}\;\left[\left(-\vec{r}-\frac{1}{2}\,\vec{a}\right)\left(1-\frac{3az}{2r^2}\right) \;+\; \left(\vec{r}-\frac{1}{2}\,\vec{a}\right)\left(1+\frac{3az}{2r^2}\right)\right] \quad (2.18)$$

Por simple aplicación de la propiedad distributiva, observamos que sobreviven los siguientes términos:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{kQ}{r^3}\;\left[2\,\vec{r}\,\frac{3az}{2r^2} \;-\; 2\,\frac{1}{2}\,\vec{a}\right] \;=\; \frac{kQ}{r^3}\;\left[\frac{3az}{r^2}\,\vec{r} \;-\; \vec{a}\right] \quad (2.19)$$

Introducimos el vector $\vec{p}$ llamado **momento dipolar eléctrico** de la distribución. Para un dipolo, $\vec{p}$ es un vector de módulo Qa, dirigido según la recta que une las cargas y sentido desde la carga negativa hacia la positiva. En nuestro caso toma la forma:

$$\vec{p} = (0, 0, Qa) \ = \ Q\,\vec{a} \tag{2.20}$$

Reemplazando en la expresión del campo tenemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) \ = \ \frac{k}{r^3} \left[\frac{3pz}{r}\,\breve{r} \ - \ \vec{p} \right] \tag{2.21}$$

o, en una forma más general:

$$\vec{E}(\vec{r}) \ = \ \frac{k}{r^3} \ [\,3\,(\vec{p}\cdot\breve{r})\ \breve{r} \ - \ \vec{p}\,] \tag{2.22}$$

2.7.2. Ejemplo 2: Campo electrostático sobre el eje de un anillo uniformemente cargado

Consideremos un anillo de radio R que posee una carga total Q uniformemente distribuida. Elegimos el origen de coordenadas en el centro del anillo, y el eje z coincidente con su eje de simetría (ver Figura 2.6). Nuestro objetivo es encontrar el campo electrostático $\vec{E}$ en un punto de dicho eje, cuya posición será $\vec{r} = (0, 0, z)$. La simetría azimutal del sistema de cargas nos permite inferir que las componentes del campo perpendiculares al eje z son nulas. Entonces:

$$E_x \ = \ 0 \qquad E_y \ = \ 0 \qquad E_z \ = \ E_z(z) \tag{2.23}$$

El campo electrostático se obtiene de resolver la integral tridimensional siguiente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_D \frac{k\ dQ}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{2.24}$$

donde los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r'}$ escritos en componentes cartesianas y coordenadas cilíndricas son:

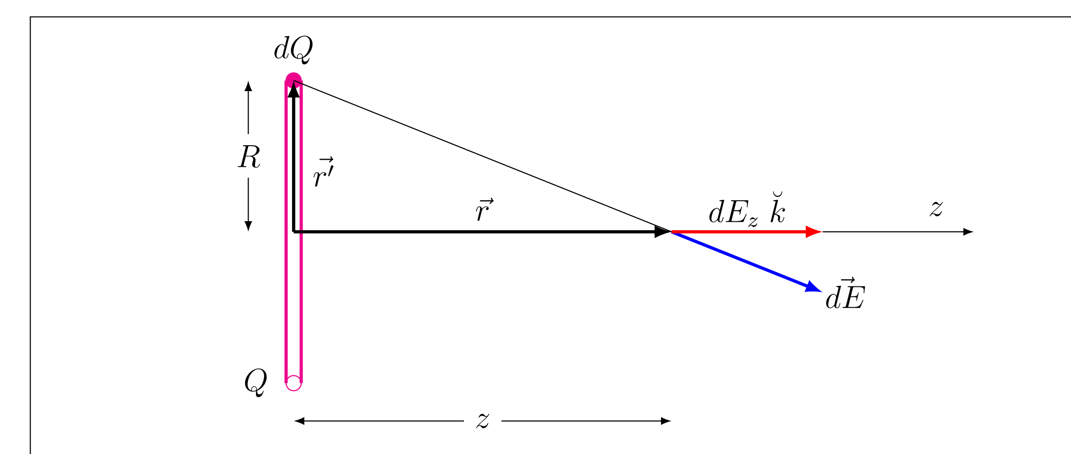


Figura 2.6: Esquema de referencias geométricas para hallar el campo electrostático en el eje de un anillo uniformemente cargado. El origen fue elegido en el centro del anillo, y el anillo está visto de canto.

$$\vec{r} = (0, 0, z) \qquad \vec{r'} = (R\ \cos(\phi'), R\ \sin(\phi'), 0) \tag{2.25}$$

Operando con los vectores tenemos:

$$\vec{r} - \vec{r'} \ = \ (-R\ \cos(\phi'), -R\ \sin(\phi'), z) \qquad |\vec{r} - \vec{r'}| \ = \ \sqrt{R^2 + z^2} \tag{2.26}$$

con lo que la integral toma la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_D \frac{k\ (-R\ \cos(\phi'), -R\ \sin(\phi'), z)\ dQ}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{2.27}$$

Como solo necesitamos calcular la componente E_z, tenemos:

$$E_z(0, 0, z) = \int_D \frac{kz\ dQ}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{2.28}$$

Observando que la integral opera sobre el dominio de las variables primadas, tenemos que z es una constante para esta integración. Entonces,

$$E_z(0, 0, z) = \frac{kz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\ \int_D dQ \tag{2.29}$$

La integral simboliza la carga total alojada en el anillo. Entonces,

$$E_z(0,0,z) = \frac{kQz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \tag{2.30}$$

O, vectorialmente:

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{kQz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\,\breve{k} \tag{2.31}$$

2.7.3. Ejemplo 3: Extensión al caso de un disco uniformemente cargado

Consideremos un disco de radio R que posee una carga total Q uniformemente distribuida. Utilizando el mismo escenario geométrico que en el ejemplo anterior, queremos calcular el campo electrostático en un punto del eje de simetría, situado a una distancia z del centro. Una estrategia de cálculo, consiste en pensar al disco como una colección de “coronas circulares infinitesimales" , cada una de las cuales se desarrolla entre los radios r' y $r'+dr'$ (con $0<r'<R$). Observe que cada corona infinitesimal tiene el mismo aspecto que un anillo, por lo que podemos aprovechar el resultado (2.31) obtenido en la sección 2.7.2. El único cuidado consiste en escribir correctamente la expresión, teniendo en cuenta su carácter diferencial (en ambos miembros), y el radio correcto. Esto es:

$$dE_z(0,0,z) = \frac{kz\,dQ}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}} \tag{2.32}$$

donde dQ es la carga residente en la corona y $dE_z(0,0,z)$ es la contribución al campo en $(0,0,z)$ debida a dicha corona. Para determinar dQ introducimos la densidad superficial de carga σ que, por hipótesis, es uniforme. Entonces,

$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} \qquad dQ = 2\pi\sigma r'\,dr' \tag{2.33}$$

Para tener en cuenta todas las contribuciones, integramos sobre todas las coronas. Esto es:

$$E_z(0,0,z) \;=\; \int_0^R \frac{2\pi k\sigma z r'\,dr'}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}} \;=\; \pi k\sigma z \int_0^R \frac{2r'\,dr'}{\left(r'^2+z^2\right)^{3/2}} \tag{2.34}$$

La integral ordinaria que queda se puede resolver mediante la sustitución siguiente:

$$u = r'^2 + z^2 \qquad du = 2r'\,dr' \tag{2.35}$$

Reemplazando en (2.34) tenemos:

$$E_z(0,0,z) \;=\; \pi k\sigma z \int_{u_1}^{u_2} u^{-3/2}\,du \;=\; \pi k\sigma z \left[-2u^{-1/2}\right]_{u_1}^{u_2} \tag{2.36}$$

Haciendo la sustitución inversa (y un poco de álgebra) tenemos el resultado que buscamos. Aprovechamos la expresión para agregarle el carácter vectorial mediante el versor $\breve{k}$.

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; -2\pi k\sigma z \left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \;-\; \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right]\breve{k} \tag{2.37}$$

Una versión algo más elocuente es:

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; 2\pi k\sigma \left[\frac{z}{\sqrt{z^2}} \;-\; \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\breve{k} \tag{2.38}$$

Tal vez el estudiante puede verse tentado a simplificar la raíz con el cuadrado, en el primer término del corchete. No olvide que debe tratar esta simplificación como un módulo. Ahora operamos un poco más.

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; 2\pi k\sigma \frac{z}{|z|} \left[1 \;-\; \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{z^2}}}\right]\breve{k} \tag{2.39}$$

Una forma compacta de escribir la última expresión, puede obtenerse introduciendo la función signo, dada por:

$$sgn(z) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{si } \; z < 0 \\ \;\;1 & \text{si } \; z > 0 \end{cases} \tag{2.40}$$

Entonces

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; 2\pi k\sigma \; sgn(z) \; \left[1 \;-\; \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{z^2}}} \right] \; \breve{k} \tag{2.41}$$

Esta expresión es exacta y válida sobre todo el eje z (tanto en valores positivos como negativos).

Una conducta muy apreciada en el tratamiento matemático de un modelo físico, consiste en desarrollar algún criterio de control sobre los resultados obtenidos. En el caso del campo electrostático, siempre que las distribuciones de carga no sean infinitamente extendidas, podemos controlar que desde muy lejos parezcan fuentes puntuales. Veamos como se hace esto. Estar muy lejos sugiere que $z >> R$, o bien

$$\frac{R}{z} \;<<\; 1 \tag{2.42}$$

En este caso conviene usar una aproximación sencilla (aunque no trivial), que proviene de desarrollos en serie de Taylor. Si $a << 1$, entonces se cumple que[2]

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} \;=\; \frac{1}{1+\frac{1}{2}a} \;=\; 1-\frac{1}{2}a \tag{2.43}$$

La aproximación puede usarse en el resultado (2.41), cuando analizamos el caso en que se cumple la condición (2.42). Entonces

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; 2\pi k\sigma \; sgn(z) \; \left[1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2} \right] \; \breve{k} \;=\; 2\pi k\sigma \; sgn(z) \; \frac{R^2}{2z^2} \; \breve{k} \tag{2.44}$$

que con un reordenamiento sencillo se convierte en

[2]Si el lector no estuviera familiarizado con estas aproximaciones, sugerimos que al menos las compruebe en su calculadora, haciendo por ejemplo $a = 0,1; 0,01; 0,001$, etcétera.

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; k\,\left(\pi R^2 \sigma\right)\;\frac{sgn(z)}{z^2}\,\breve{k} \;=\; \frac{kQ\;sgn(z)}{z^2}\,\breve{k} \tag{2.45}$$

Esta expresión es exactamente el campo electrostático producido por una carga puntual situada en el origen, vista por un observador situado en el eje z. Este resultado constituye una “contrastación" de la expresión (2.41). Es imprescindible que esto funcione, aunque no constituye una “garantía de confiabilidad del resultado". Pero entonces ¿para qué lo hacemos? Simplemente porque si no hubiera dado correctamente, habría permitido la detección de un error en (2.41).

2.7.4. Ejemplo 4: Extensión al caso de un plano uniformemente cargado

Si ahora queremos abordar el problema de un plano infinito uniformemente cargado con densidad superficial σ, podemos pensarlo simplemente como un disco de radio infinito. El resultado puede obtenerse haciendo el límite para R tendiendo a infinito en la expresión (2.41). Esto es

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; \lim_{R\to\infty}\; 2\pi k\sigma\; sgn(z)\;\left(1 \;-\; \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{R^2}{z^2}}}\right)\;\breve{k} \;=\; 2\pi k\sigma\; sgn(z)\;\breve{k} \tag{2.46}$$

Recordando que la constante k puede escribirse en función de ϵ_0, tenemos

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; \frac{\sigma\; sgn(z)}{2\epsilon_0}\,\breve{k} \tag{2.47}$$

O, en una forma alternativa

$$\vec{E}(0,0,z) \;=\; \begin{cases} -\,\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z<0 \\ \;\;\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z>0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Este resultado tiene una nota interesante. Observe el lector que el campo electrostático calculado vale para el “eje de simetría", pensando al plano como un gran disco. Sin embargo el plano tiene una simetría mayor que el disco, por lo que pierde sentido pensar en un único eje de simetría. En tal caso podríamos

decir que cualquier recta perpendicular al plano es un eje de simetría, y por tanto el resultado (2.53) es válido en todas partes. Así tenemos que

$$\vec{E}(x,y,z) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } z<0 \\ \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } z>0 \end{cases} \tag{2.49}$$

2.7.5. Ejemplo 5: Campo electrostático de un hilo uniformemente cargado

Consideremos un hilo recto de longitud l, sobre el cual reside una carga eléctrica Q uniformemente distribuida. Nos proponemos determinar el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en todas partes. Comencemos por reconocer que la simetría azimutal de la distribución de carga sugiere el uso de coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z. Analizando dicha simetría, concluimos que las componentes del campo deben ser de la forma (eligiendo el eje z coincidiendo con la posición del hilo)

$$E_\rho \;=\; E_\rho(\rho,z) \qquad E_\phi \;=\; 0 \qquad E_z \;=\; E_z(\rho,z) \tag{2.50}$$

Observando que la carga se encuentra sobre un soporte lineal, el cálculo de las componentes del campo puede hacerse mediante la integral siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_C \frac{k\lambda\;dl}{|\vec{r}-\vec{r'}|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{2.51}$$

donde

$$\lambda = \frac{Q}{l} \quad y \quad dl = dz' \tag{2.52}$$

mientras que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r'}$ en componentes cartesianas expresadas en coordenadas cilíndricas son:

$$\vec{r} = (\rho\;\cos(\phi), \rho\;\sin(\phi), z) \qquad \vec{r'} = (0,0,z') \tag{2.53}$$

Operando con los vectores tenemos que:

$$\vec{r}-\vec{r'} \;=\; (\rho\;\cos(\phi), \rho\;\sin(\phi), z-z') \qquad |\vec{r}-\vec{r'}| \;=\; \sqrt{\rho^2+(z-z')^2} \tag{2.54}$$

Entonces la integral toma la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{k\lambda\;(\rho\;\cos(\phi), \rho\;\sin(\phi), z-z')\;dz'}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} \tag{2.55}$$

donde z_1' y z_2' son los límites de integración sobre el parámetro z', que satisfacen $z_2'-z_1'=l$. Observe que la última expresión constituye una integral vectorial, que puede descomponerse en tres integrales escalares, de las cuales solo hay que resolver dos. Ellas son

$$a) \qquad E_\rho(\rho,z) \;=\; k\lambda\rho \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{dz'}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} \tag{2.56}$$

$$b) \qquad E_z(\rho,z) \;=\; k\lambda \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{(z-z')\;dz'}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} \tag{2.57}$$

La resolución de estas integrales nos permite alcanzar el objetivo planteado. Nótese que (2.56) y (2.57) son integrales ordinarias en el dominio unidimensional de la variable z', a diferencia de (2.55) que simboliza una integral vectorial.

a) Para resolver la primera integral, comenzamos por reescribirla como sigue

$$E_\rho(\rho,z) \;=\; \frac{k\lambda}{\rho} \int_{z_1'}^{z_2'} \left[1+\left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2\right]^{-3/2} \frac{dz'}{\rho} \tag{2.58}$$

Luego proponemos la siguiente sustitución trigonométrica

$$\frac{z-z'}{\rho} \;=\; tg(u) \qquad \rightarrow \qquad -\frac{dz'}{\rho} \;=\; \frac{du}{\cos^2(u)} \tag{2.59}$$

con lo que la integral toma la forma

$$E_\rho(\rho,z) \;=\; -\frac{k\lambda}{\rho} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{[\;1+tg^2(u)]^{3/2}\;\cos^2(u)} \tag{2.60}$$

Utilizando identidades trigonométricas tenemos

$$1 + tg^2(u) \;=\; 1 + \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} \;=\; \frac{\cos^2(u) + \sin^2(u)}{\cos^2(u)} \;=\; \frac{1}{\cos^2(u)} \tag{2.61}$$

Reemplazando, podemos resolver la integral

$$E_\rho(\rho, z) \;=\; -\frac{k\lambda}{\rho} \int_{u_1}^{u_2} \cos(u)\; du \;=\; -\frac{k\lambda}{\rho}\; [\sin(u_2) - \sin(u_1)] \tag{2.62}$$

Ahora recordamos una identidad trigonométrica no tan conocida

$$\sin(u) \;=\; \frac{tg(u)}{\sqrt{1 + tg^2(u)}} \tag{2.63}$$

Utilizándola tenemos

$$\sin(u) \;=\; \frac{\frac{z-z'}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2}} \;=\; \frac{z - z'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \tag{2.64}$$

con lo que el resultado final toma la forma

$$E_\rho(\rho, z) \;=\; \frac{k\lambda}{\rho} \left[\frac{z - z_1'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1')^2}} \;-\; \frac{z - z_2'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_2')^2}} \right] \tag{2.65}$$

b) La integral (2.57) es mucho más sencilla que la anterior. La transcribimos simplemente para tenerla presente

$$E_z(\rho, z) \;=\; k\lambda \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{(z - z')\; dz'}{\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{3/2}} \tag{2.66}$$

Para resolverla proponemos la sustitución

$$u \;=\; \rho^2 + (z - z')^2 \qquad \rightarrow \qquad du \;=\; -2\; (z - z')\; dz' \tag{2.67}$$

Entonces reemplazamos y resolvemos

$$E_z(\rho, z) \;=\; -\frac{k\lambda}{2} \int_{u_1}^{u_2} \; u^{-3/2}\, du \;=\; k\lambda \; \left[u_2^{-1/2} - u_1^{-1/2}\right] \tag{2.68}$$

Luego, el resultado final es

$$E_z(\rho, z) \;=\; k\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_2')^2}} \;-\; \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1')^2}} \right] \tag{2.69}$$

Así completamos la resolución de las integrales. Las transcribimos reemplazando la densidad en función de los datos Q y l:

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, z) \;=\; \dfrac{kQ}{\rho l} \left[\dfrac{z - z_1'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1')^2}} \;-\; \dfrac{z - z_2'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_2')^2}} \right] \\ E_z(\rho, z) \;=\; \dfrac{kQ}{l} \left[\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_2')^2}} \;-\; \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1')^2}} \right] \end{cases} \tag{2.70}$$

Pero aún sobrevive una dificultad. La primera de las integrales se indetermina para $\rho = 0$. Para encontrar el límite, comenzamos por buscar una aproximación para pequeños valores de ρ. Para ello reescribimos E_ρ en la forma siguiente

$$E_\rho(\rho, z) \;=\; \frac{kQ}{\rho l} \left[\frac{sgn\,(z - z_1')}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - z_1'}\right)^2}} \;-\; \frac{sgn\,(z - z_2')}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z - z_2'}\right)^2}} \right] \tag{2.71}$$

Luego aproximamos las raíces

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, z) = \frac{kQ}{\rho l} \Bigg\{ & sgn\,(z - z_1') \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z - z_1'} \right)^2 \right] \\ & - sgn\,(z - z_2') \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{z - z_2'} \right)^2 \right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.72}$$

con lo que operando obtenemos

$$E_\rho(\rho,z) = \frac{kQ}{l}\left\{\frac{sgn\,(z-z_1') - sgn\,(z-z_2')}{\rho} - \frac{\rho}{2}\left[\frac{sgn\,(z-z_1')}{(z-z_1')^2} - \frac{sgn\,(z-z_2')}{(z-z_2')^2}\right]\right\} \tag{2.73}$$

Con este resultado estamos en condiciones de hacer el límite

$$E_\rho(0,z) \;=\; \lim_{\rho\to 0} E_\rho(\rho,z) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } z < z_1' \\ \to\infty & \text{si } z_1' < z < z_2' \\ 0 & \text{si } z_2' < z \end{cases} \tag{2.74}$$

Para completar el análisis, observemos el límite análogo para E_z:

$$E_z(0,z) \;=\; \frac{kQ}{l}\left[\frac{1}{\sqrt{(z-z_2')^2}} \;-\; \frac{1}{\sqrt{(z-z_1')^2}}\right] \tag{2.75}$$

que puede reescribirse como

$$E_z(0,z) \;=\; \frac{kQ}{l}\left[\frac{1}{|z-z_2'|} \;-\; \frac{1}{|z-z_1'|}\right] \tag{2.76}$$

2.7.6. Ejemplo 6: Extensión al caso de un hilo infinito

El resultado (2.71) puede extenderse al caso en que el hilo se hace infinitamente largo, mediante el procedimiento que describimos a continuación. En primer lugar, hacemos $z_1' = -a$ y $z_2' = a$, donde a es una constante positiva medida en unidades de longitud. Entonces, las expresiones (2.71) toman la forma

$$\begin{cases} E_\rho(\rho,z) \;=\; \dfrac{k\lambda}{\rho}\left[\dfrac{z+a}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} \;-\; \dfrac{z-a}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}\right] \\[2ex] E_z(\rho,z) \;=\; k\lambda\left[\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} \;-\; \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}\right] \end{cases} \tag{2.77}$$

Ahora buscamos la forma que adquieren estas expresiones en $z = 0$ (es decir, a la altura de la mitad del hilo), para cualquier valor de ρ. Así tenemos

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, 0) \ = \ \dfrac{k\lambda}{\rho} \left[\dfrac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \ - \ \dfrac{-a}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right] \\ E_z(\rho, 0) \ = \ k\lambda \left[\dfrac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \ - \ \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} \right] \end{cases} \tag{2.78}$$

De esto se concluye que la componente E_z en $z = 0$ es nula para todo valor de ρ. Pero como a nosotros nos interesa el caso en que el hilo es infinito, analizamos la situación en que $a >> \rho$. Así tendremos

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, 0) \ = \ \dfrac{k\lambda}{\rho} \left[\dfrac{a}{\sqrt{a^2}} \ - \ \dfrac{-a}{\sqrt{a^2}} \right] \\ E_z(\rho, 0) \ = \ 0 \end{cases} \tag{2.79}$$

Entonces el comportamiento para grandes valores de a será

$$\begin{cases} E_\rho(\rho, 0) \ = \ \dfrac{2k\lambda}{\rho} \ = \ \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \\ E_z(\rho, 0) \ = \ 0 \end{cases} \tag{2.80}$$

En particular, si a tiende a infinito, las expresiones (2.80) quedan habilitadas para todo valor de ρ. También puede observarse que un deslizamiento del origen a lo largo del eje z no alterará el resultado, por lo que (2.80) también está habilitada para todo valor de la coordenada z. Entonces, la forma vectorial compacta de este resultado será

$$\vec{E}(\vec{r}) \ = \ \frac{2k\lambda}{\rho} \, \breve{\rho} \ = \ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \, \breve{\rho} \tag{2.81}$$

2.8. Problemas

1. En base a la definición teórica de campo electrostático y teniendo en cuenta la factibilidad de medir el campo en sentido práctico, analice las siguientes afirmaciones, justifíquelas e ilustre con ejemplos.

   a) Las dimensiones geométricas de la partícula de prueba deben ser tan pequeñas como sea posible.

   b) La carga q residente en la partícula de prueba debe ser de magnitud tan pequeña como sea posible.

   c) Es conveniente (aunque no imprescindible) que la carga q residente en la partícula de prueba sea positiva.

2. Resulta especialmente práctico en muchas aplicaciones, suponer que una partícula portadora de carga es “puntual" (por supuesto que esto es solo una manera de modelar). Entonces, discuta el alcance de este modelo. En particular, explique qué debe interpretarse cuando el módulo del campo electrostático tiende a infinito, al acercarnos a una “carga puntual".

3. Compare las fuerzas que actuarían sobre un electrón y un protón libres y en reposo, bajo la acción de un mismo campo electrostático. Compare las correspondientes aceleraciones.

4. Dos partículas puntuales, con cargas de 5 μC y -10 μC están rígidamente sostenidas con una separación de 1m.

   a) Determine el campo electrostático en un punto situado a $0,6$ m de la primera partícula y a $0,8$ m de la segunda.

   b) ¿En qué punto resultará nulo el campo electrostático debido a estas cargas?

   c) Determine el punto sobre la línea que une ambas partículas, donde las cargas contribuyen con campos exactamente iguales.

5. Un dispositivo formado por dos placas conductoras planas paralelas, separadas una distancia bastante menor que sus dimensiones lineales, puede utilizarse para producir campos electrostáticos aproximadamente uniformes. Suponga que uno de estos dispositivos está formado por dos placas cuadradas de 4 cm de lado, colocadas en posición horizontal y separadas 1 cm. En el espacio entre ellas se genera un campo electrostático vertical que puede ser considerado como uniforme, mientras que fuera el campo es nulo.
   Un electrón es lanzado con rapidez inicial $v_0 = 10^7$ m/s en dirección paralela a las placas y desde un punto que equidista de las mismas.

   a) Si cuando el electrón sale de la región del campo, pasa justamente por el borde de la placa superior, determine el vector campo electrostático $\vec{E}$ producido por las placas.

b) Determine el vector velocidad de “salida" del electrón.

6. Cada una de las cargas que componen un dipolo eléctrico tienen un valor absoluto de $0,5$ nC, y se encuentran separadas una distancia de 1 mm. Calcule el campo electrostático en un punto del plano de simetría del dipolo, situado a 10 cm de su centro.

7. Un ión de cloro de carga $-e$ se sitúa frente a una molécula de agua, cuyo momento dipolar eléctrico apunta exactamente al ión. La distancia entre ambas partículas es 5×10^{-8} m. El módulo del momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ de la molécula de agua es $p = 6,17 \times 10^{-30}$ Cm. Encuentre la fuerza eléctrica ejercida por la molécula sobre el ión. ¿Es una fuerza atractiva o repulsiva?[3]

8. Cuatro partículas pequeñas se emplazan rígidamente en los vértices de un cuadrado de 10 cm de lado.

   a) Considere el caso en que todas las partículas están igualmente cargadas con 100 μC. Construya un gráfico del montaje y utilice razonamientos de simetría para determinar la dirección y sentido del campo electrostático en el centro del cuadrado y en el punto medio de cada lado[4]. ¿Qué componentes serán nulas en cada punto? Luego calcule las componentes no nulas.

   b) Repita el análisis para el caso en que las partículas posean alternadamente cargas de 100 μC y -100 μC.

   c) Idem para el caso en que tres partículas tienen cargas de 100 μC y la restante tiene -100 μC.

9. Considere dos planos paralelos infinitamente extendidos y separados una distancia d. Sobre cada uno de ellos yacen distribuciones uniformes de cargas de densidades superficiales σ_1 y σ_2 respectivamente. Determine el campo electrostático en todas partes, y en cada uno de los siguientes casos:

   a) $\sigma_1 = 3$ mC/m^2 y $\sigma_2 = 3$ mC/m^2.

   b) $\sigma_1 = 3$ mC/m^2 y $\sigma_2 = -3$ mC/m^2.

   c) $\sigma_1 = 3$ mC/m^2 y $\sigma_2 = 5$ mC/m^2.

   d) $\sigma_1 = 3$ mC/m^2 y $\sigma_2 = -5$ mC/m^2.

---

[3] Observe que la distancia entre la molécula y el ión es mucho mayor que las dimensiones atómicas o moleculares. Por lo tanto cabe modelar a la molécula de agua como un dipolo puntual y al ion de cloro como una carga puntual.

[4] Trate de resolver esta parte sin hacer cuentas. El objetivo es que usted se entrene en razonamientos vectoriales que le permitan predecir resultados, como futura herramienta de control y formación de criterio.

10. Una esfera hueca no conductora de radio $R = 12$ cm y espesor despreciable, se separa en dos mitades. Una de las partes se retira y la otra se carga uniformemente a razón de $400\ \mu$C/m^2. Determine el campo electrostático en el centro de curvatura de la pieza.

11. Un anillo de 12 cm de radio posee una carga de $50\,\mu$C uniformemente distribuida. Un tubo delgado yace fijo a lo largo del eje del anillo[5]. Dentro del tubo se desliza una partícula de 4 g cuya carga es de $-20\,\mu$C (libre de rozamiento). Se observa que la partícula realiza oscilaciones armónicas con una amplitud de $1,4$ cm.

    a) Determine la frecuencia de oscilación.
    b) Construya las funciones que describen el movimiento (posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo).
    c) Determine los módulos máximos de velocidad y aceleración.

12. Dibuje algunas líneas de campo para las siguientes distribuciones de carga:

    a) Carga puntual negativa.
    b) Dipolo eléctrico.
    c) Dos cargas puntuales negativas iguales.
    d) Dos cargas puntuales de distinto signo, tales que el valor absoluto de una de ellas es cinco veces mayor que el de la otra.
    e) Cuatro cargas puntuales positivas idénticas situadas en los vértices de un cuadrado.

13. Una partícula de prueba cargada se coloca en un punto del espacio donde existe un campo electrostático, y se la libera en reposo. ¿Coincidirá la trayectoria de la partícula con una línea de campo? Analice los siguientes casos y discuta similitudes y diferencias:

    a) Cuando el campo es producido por una carga puntual.
    b) Cuando el campo es producido por un dipolo eléctrico.

14. Un cascarón esférico de radio R y espesor despreciable, se encuentra cargado con una densidad uniforme σ. Suponga que al cascarón se le extrae una porción que genera un agujero circular de radio a ($a < R$).

    a) Determine el potencial electrostático como función de la posición para los puntos situados sobre una semirecta con orígen en el centro del cascarón y orientada de manera que pase por el centro del agujero.
    b) Sobre la misma semirecta determine el campo electrostático como función de la posición.

[5] Suponga que el tubo no interactúa eléctricamente con el sistema. Solo funciona como guía.

c) Utilice las expresiones obtenidas para el potencial y el campo para estudiar el caso límite en que el radio del agujero tiende a cero ($a \to 0$).

Capítulo 3
Ley de Gauss. Simetrías

3.1. Concepto de flujo de un campo vectorial

El concepto de **flujo de un campo vectorial a través de una superficie** tiene una definición matemática estricta, pero la diversidad de ejemplos físicos permite una comprensión intuitiva bastante accesible. Comencemos por definir rigurosamente. En primer lugar, supongamos que un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ existe en cierta región del espacio. Supongamos además que en dicha región definimos una superficie simple imaginaria[1], y elegimos una de sus caras para caracterizar su orientación. Luego nos imaginamos un mallado que subdivida la superficie en fragmentos diferencialmente pequeños. Sobre cada uno de ellos definimos un vector $\vec{ds}$ cuyo módulo coincide con el área del fragmento de superficie, su dirección es perpendicular al elemento (y por tanto perpendicular a la superficie), y su sentido es saliente de la cara elegida cuando se orientó la superficie. Entonces, el flujo $\Phi_{\vec{A}S}$ del campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ a través de la superficie orientada S se define como

$$\Phi_{\vec{A}S} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{ds} \tag{3.1}$$

Recordando que una integral representa la suma de contribuciones diferenciales, podemos interpretar la definición como sigue. En el mallado de la superficie, nos situamos sobre uno de los elementos, y sobre él identificamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{ds}$. Luego efectuamos el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{ds}$ correspondiente al elemento elegido y el resultado (escalar) lo guardamos. Pasamos a otro elemento y repetimos el procedimiento. Así sucesivamente hasta recorrer todos los elementos de la

[1] Descartamos aquí superficies con propiedades topológicas complejas, como aquellas que se cortan a sí mismas, o las que se cierran en forma extraña como las cintas de Moebius.

superficie. Finalmente, sumamos todos estos resultados parciales para obtener el flujo.

Aquí conviene hacer hincapié en que el símbolo de integración, a pesar de ser gráficamente análogo, no representa una integral ordinaria, sino una integral de superficie. Este tipo de integrales requieren, en general, técnicas especiales de resolución, que nosotros solo abordaremos en casos de extrema simplicidad.

3.2. Flujo del campo electrostático

En este curso, el concepto de flujo será muy recurrente, debido a la diversidad de campos vectoriales que se utililizan para la debida descripción de la teoría electromagnética. Aquí va nuestro primer ejemplo. El flujo del campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ a través de la superficie orientada S será

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \tag{3.2}$$

Notemos que el flujo de un campo vectorial requiere siempre una doble especificación. Uno debe consignar cuál es el campo vectorial (en este caso el campo electrostático $\vec{E}$), y sobre qué superficie orientada S se lo calcula. De estas especificaciones surge la notación que proponemos, que para este caso se subindica $\vec{E}S$.

Por otra parte, cabe observar que el flujo es una magnitud escalar, que puede tomar valores positivos y negativos. Una interpretación intuitiva del signo del flujo (aunque no estricta) puede elaborarse de la siguiente manera. Si el flujo es positivo, podemos imaginar que predominantemente los vectores $\vec{E}$ y $\vec{ds}$ están del mismo lado de la superficie. Análogamente tendremos valores negativos de flujo cuando los vectores $\vec{E}$ y $\vec{ds}$ queden, predominantemente, uno a cada lado de la superficie[2].

3.3. Ejemplo de cálculo de flujo

Consideremos el campo electrostático producido por un hilo recto infinito, con densidad lineal de carga uniforme λ. Según hemos visto, si el hilo se encuentra sobre el eje z, el campo $\vec{E}(\vec{r})$ viene dado por

[2]Lo que hace imprecisa la interpretación es la palabra “predominantemente". Esta palabra se utiliza para indicar que sobre la superficie, puede haber zonas donde el campo $\vec{E}$ esté a un lado de S, y otras zonas en que ocurra lo contrario. Entonces el signo del flujo corresponderá al comportamiento dominante.

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\,\breve{\rho} \;=\; \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2}}\frac{(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \;=\; \frac{\lambda\;(x,y,0)}{2\pi\epsilon_0\,(x^2+y^2)} \tag{3.3}$$

donde la segunda expresión no es más que la traducción en componentes y coordenadas cartesianas.

Como ejemplo proponemos calcular el flujo del campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ a través de una superficie cuadrada de lado l, situada como indica la Figura 3.1.

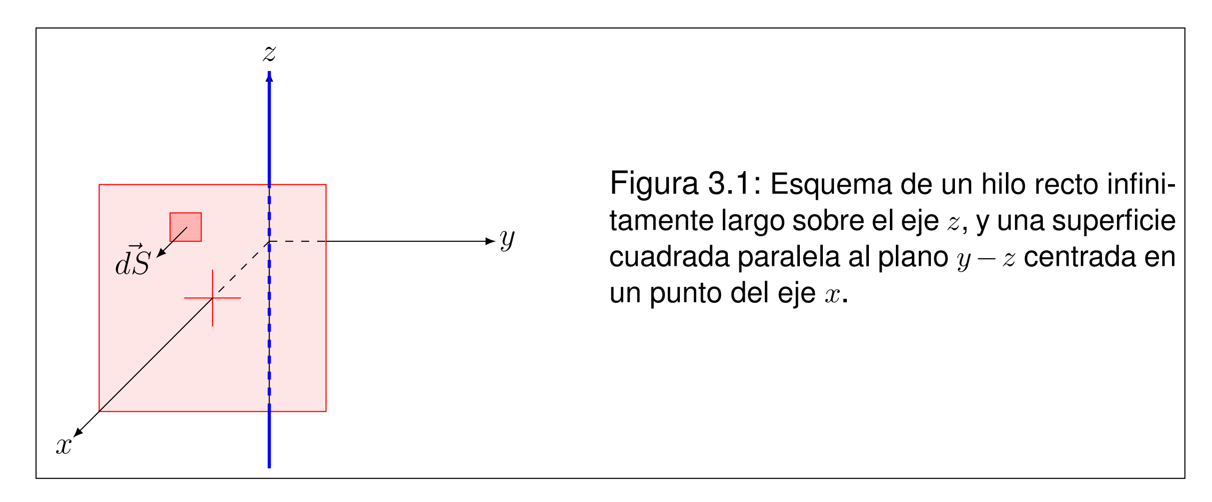


Figura 3.1: Esquema de un hilo recto infinitamente largo sobre el eje z, y una superficie cuadrada paralela al plano $y-z$ centrada en un punto del eje x.

En este contexto, los vectores $\vec{ds}$ tienen la forma siguiente

$$\vec{ds} \;=\; dy\,dz\,\breve{\imath} \;=\; dy\;dz\;\;(1,0,0) \tag{3.4}$$

Así tenemos todos los ingredientes para resolver la integral (3.2). Por simplicidad mantendremos la notación x para indicar la coordenada correspondiente a la localización de la superficie. Entonces tenemos que

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_S \vec{E}\cdot\vec{ds} \;=\; \int_S \frac{\lambda\;(x,y,0)}{2\pi\epsilon_0\,(x^2+y^2)}\;\cdot\;dy\;dz\;\;(1,0,0) \tag{3.5}$$

Resolviendo el producto escalar y agregando los límites de integración, tenemos

$$\Phi_{\vec{E}S} = \int_{-l/2}^{l/2}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\lambda x\,dy\,dz}{2\pi\epsilon_0\,(x^2+y^2)} \;=\; \frac{\lambda x}{2\pi\epsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dy}{x^2+y^2}\;\int_{-l/2}^{l/2}dz \tag{3.6}$$

La segunda integral es de resolución inmediata, mientras que la primera puede escribirse en un formato conocido

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{x\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]} \tag{3.7}$$

Esta integral admite la sustitución siguiente

$$u \;=\; \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad du \;=\; \frac{dy}{x} \tag{3.8}$$

con lo que se obtiene

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l/2x}^{l/2x} \frac{du}{1+u^2} \;=\; \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \left[arctg\left(\frac{l}{2x}\right) \;-\; arctg\left(-\frac{l}{2x}\right)\right] \tag{3.9}$$

Observando que el arcotangente es una función impar obtenemos el resultado final

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{\lambda l}{\pi\epsilon_0} \;\, arctg\left(\frac{l}{2x}\right) \tag{3.10}$$

3.4. Ley de Gauss

Consideremos una región del espacio en la que existe un campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ y sus fuentes (cargas eléctricas estáticas), descriptas mediante una densidad volumétrica $\delta(\vec{r'})$. Ahora elegimos una superficie cerrada imaginaria cualquiera S que limita un volumen V. Elegimos la orientación de la superficie S de modo que sus vectores normales $\vec{ds}$ resulten exteriores (ver Figura 3.2). Entonces:

El flujo del campo electrostático $\vec{E}$ a través de la superficie cerrada S es proporcional a la carga Q_{RS} residente en el volumen V limitado por dicha superficie. Esto es

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \delta \; dv \tag{3.11}$$

Teniendo en cuenta la notación introducida para flujos, podemos escribir una

expresión de bolsillo equivalente

$$\Phi_{\vec{E}S} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \tag{3.12}$$

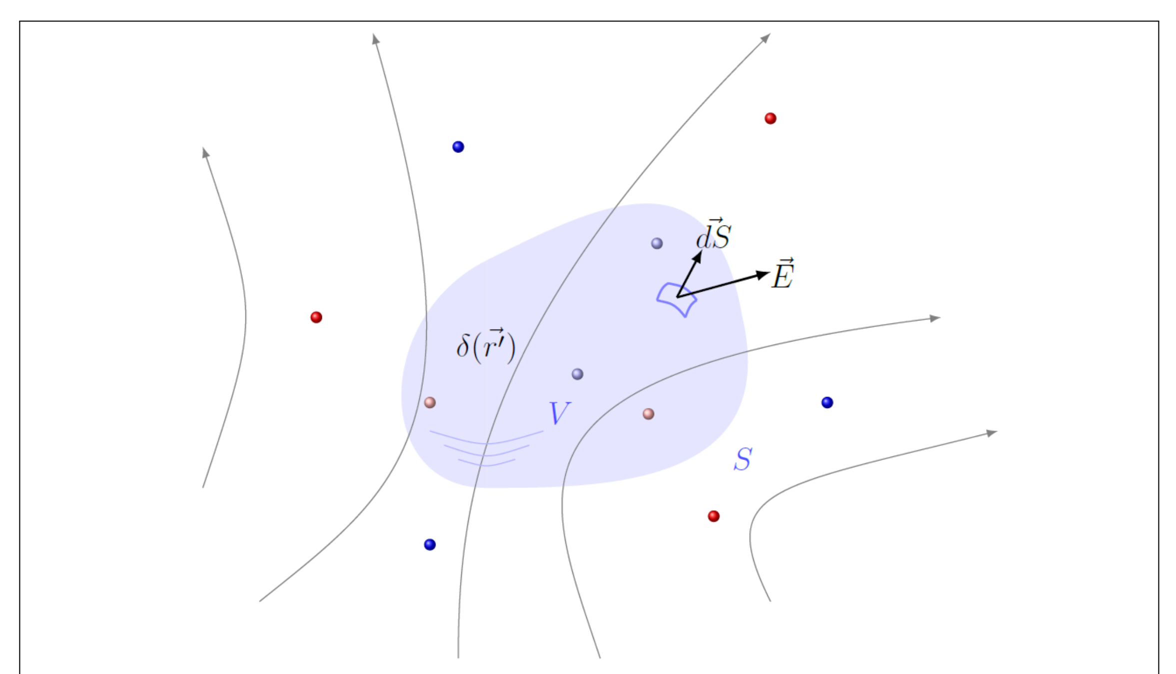


Figura 3.2: Elementos geométricos asociados a la Ley de Gauss. La superficie S encierra un volumen V. El $d\vec{S}$ es exterior al volumen V. Las fuentes de $\vec{E}$ son las cargas internas a V, externas a V, y otras fuentes que se encuentran fuera de la región mostrada en la Figura. $\delta(\vec{r'})$ es la densidad volumétrica de carga. Las líneas de campo indicadas son solo una representación genérica de la existencia del campo, por lo que no pretenden reflejar estrictamente sus puntos de iniciación y finalización.

La ley de Gauss es una de las ecuaciones integrales del campo electrostático, y su aplicabilidad es universal. Esto es, no tiene restricciones para su aplicación en electrostática. Sin embargo, no constituye en general una herramienta que, por sí misma, permita determinar el campo electrostático a partir de la distribución de fuentes. Solo si la distribución es altamente simétrica la ley de Gauss puede proveer una técnica de cálculo viable a tal fin. Nosotros abordaremos esta técnica después de discutir algunos conceptos relacionados con la simetría. Por el momento daremos algunas aplicaciones directas para ilustrar el uso de la ley de Gauss en relación con los flujos.

3.5. Ejemplo de aplicación de la ley de Gauss

Consideremos un cuerpo cúbico de lado l que aloja una carga total Q uniformemente distribuida en su volumen (Figura 3.3). Supongamos que el origen de coordenadas lo elegimos coincidente con el centro del cubo. Nos proponemos calcular el flujo del campo electrostático a través de las superficies siguientes:

(a) Una superficie esférica S_a, de radio $3l/8$ centrada en el origen.
(b) Una superficie cúbica S_b, de lado $3l/4$ centrada en el origen.
(c) Una superficie cúbica S_c, de lado $3l/2$ centrada en el origen.
(d) Una superficie cúbica S_d, de lado l con un vértice en el origen.

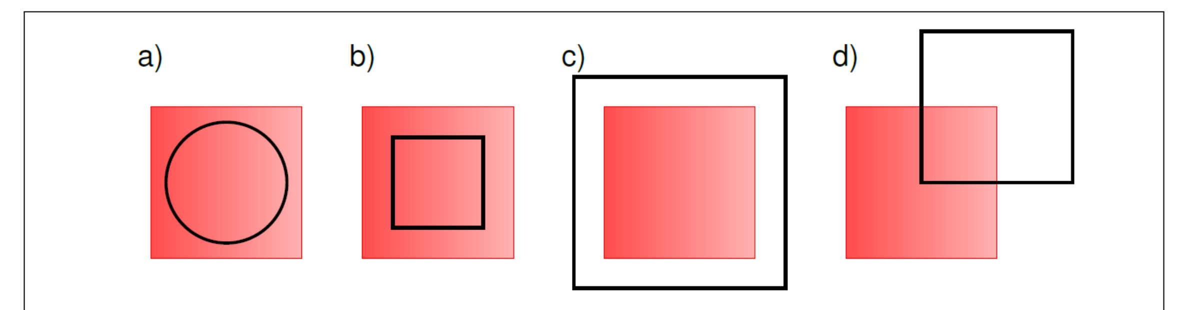


Figura 3.3: Esquema de una distribución de carga uniformemente distribuida en un sustrato cúbico (visto de frente). En la secuencia se muestran cuatro superficies cerradas que abarcan distintas porciones de la carga. El flujo del campo electrostático a través de cada superficie puede determinarse mediante la ley de Gauss.

En primer lugar observemos que la densidad volumétrica de carga δ es constante, y vale

$$\delta = \frac{Q}{l^3}. \tag{3.13}$$

La estrategia para obtener el flujo del campo $\vec{E}$ producido por la distribución, consiste en determinar la cantidad de carga “encerrada" dentro de cada superficie. En los casos a) y b), los volúmenes limitados por las superficies están completamente ocupados por la distribución de carga. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}S_a} &= \frac{4\pi\ 27\ l^3\ \delta}{3 \cdot 512\ \epsilon_0} = \frac{9\pi Q}{128\ \epsilon_0} \\ \Phi_{\vec{E}S_b} &= \frac{27\ l^3\ \delta}{64\ \epsilon_0} = \frac{27\ Q}{64\ \epsilon_0} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por su parte, la superficie S_c contiene toda la carga de la distribución en el volumen que ella limita. Por último, la superficie S_d contiene la octava parte de la carga total. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}S_c} =& \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Phi_{\vec{E}S_d} =& \frac{Q}{8\ \epsilon_0} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Observe el lector, que la ley de Gauss nos ha permitido obtener los respectivos flujos *sin calcular* el campo $\vec{E}$ (que, dicho sea de paso, no es tarea fácil para esta distribución).

3.6. Relación entre líneas de campo y fuentes

La Ley de Gauss permite el análisis de la relación que existe entre las líneas de campo electrostático y las cargas (fuentes escalares) que le dan origen a dicho campo. Comencemos por imaginar una carga puntual y una superficie esférica imaginaria centrada en ella. Si la carga es positiva y la esfera suficientemente pequeña, el campo electrostático sobre la superficie estará representado por vectores exteriores a la misma. En cierto modo, pensando en la orientación de las líneas de campo, podríamos decir que ellas *salen* de la superficie esférica. Por extensión, podríamos decir que *nacen* en la carga positiva.

El mismo análisis es válido para cargas negativas, aunque las mismas representarán el punto de finalización de la línea de campo. En conclusión, decimos que las líneas de campo se inician en cargas positivas y terminan en cargas negativas.

Supongamos ahora que cierta superficie cerrada no posee cargas eléctricas en su interior. Entonces dentro de ella no se inician ni terminan líneas de campo. En otras palabras, si una línea de campo cruza la superficie en un punto en sentido entrante, necesariamente debe cruzarla otra vez (por supuesto, en otro punto) en sentido saliente[3].

Algunos autores suelen referirse a esta propiedad diciendo que si en el interior de una superficie cerrada no residen cargas eléctricas, entonces habrá tantas líneas de campo entrantes como salientes. En apariencia este enunciado parece ser una buena síntesis de la propiedad presentada anteriormente. Sin embargo, no es apropiado considerar cuantitativamente a las líneas de campo, dado que

[3]Esta conclusión falla en los casos especiales en que existen puntos de campo nulo en el volumen limitado por la superficie cerrada. Estos casos especiales serán tratados más adelante.

cualquiera sea el tamaño de la superficie, siempre habrá una cantidad infinita de ellas que la atraviesan. En tal caso conviene decir que cada línea de campo que *entra* en la superficie también *sale* de la misma.

3.7. Simetría de distribuciones y campos

Las propiedades integrales de los campos, como la ley de Gauss y otras que trataremos más adelante, constituyen una herramienta de cálculo muy práctica para ciertos casos en que las fuentes del campo tienen alta simetría. Pero esto solo es un pretexto para introducir algunas ideas sobre simetría que, como seguramente el estudiante podrá apreciar, exceden ampliamente al tema que aquí tratamos. La intención es promover la creatividad operativa, en detrimento de tediosos cálculos formales, a la vez que intentamos generar criterios de control simples y eficaces.

Comencemos reconociendo una propiedad más que evidente. Cuando una distribución de fuentes se traslada o cambia de orientación sin modificar su forma, el campo asociado a ella se traslada o rota con ella. Los ejemplos son muy elocuentes. La Tierra lleva consigo los campos magnético y gravitatorio que genera. Evidencia de ello es que las brújulas de los marinos siguen apuntando al norte, mientras que las plomadas de los albañiles siguen apuntando hacia abajo, tanto en invierno como en verano, y tanto de día como de noche. Un ejemplo más cotidiano lo representan los imanes. Cuando alquien compra un imán, en realidad está interesado en su campo magnético, el cual *viaja* junto con el imán a todas partes. En cierto modo podríamos decir que el campo está *atado* a las fuentes que lo originan[4].

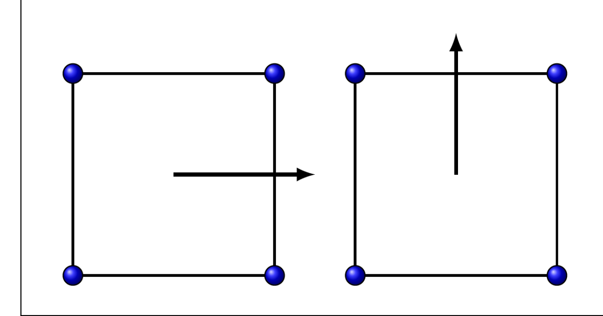


Figura 3.4: Esquema de cuatro cargas puntuales idénticas situadas en los vértices de un cuadrado. Si el sistema se rota en $\pi/2$ alrededor de un eje perpendicular al plano del cuadrado que pasa por su centro, la figura rotada coincide con la original.

Ahora centremos la atención en cuestiones geométricas. Comencemos por

[4]Veremos más adelante que esto no siempre es así. Podríamos decir en forma algo más precisa, que esta propiedad asiste a los campos estáticos, como es el caso del campo electrostático, y los otros mencionados en los ejemplos. Más adelante trataremos los campos dependientes del tiempo donde las cosas son diferentes.

imaginar un cuerpo sólido sobre el que reside una distribución de cargas. Cualquier cambio de lugar u orientación del cuerpo puede pensarse como una secuencia de rotaciones y traslaciones. Pero en ciertas circunstancias, el movimiento del cuerpo lo sitúa de modo que la distribución de cargas es idéntica a la que había originalmente. Como ejemplo imaginemos una pieza cuadrada que posee cargas puntuales positivas idénticas en sus vértices. Si la misma rota en un ángulo $\alpha = \pi/2$ alrededor de un eje que pasa por el centro del cuadrado, y es perpendicular al plano que lo contiene (ver Figura 3.4), el aspecto de la distribución rotada coincide con la forma original. En ese caso decimos que la distribución de cargas tiene una **simetría de rotación**. Además decimos que el eje mencionado es un **eje de simetría** de la distribución.

El paso siguiente consiste en preguntarnos por el campo electrostático asociado a la distribución. Es evidente que si las distribuciones original y rotada son indistinguibles, los campos que generan también lo serán. Entonces la simetría de la distribución de fuentes se observa también en el campo que ella genera.

Un razonamiento análogo puede hacerse para el caso de traslaciones, aunque solo se observará simetría (en sentido estricto) cuando las distribuciones sean infinitamente extendidas. Por tanto, este tipo de simetría solo será admitida en el mundo de los modelos.

Volvamos al ejemplo del cuadrado. ¿Qué nos puede decir la simetría acerca del campo?

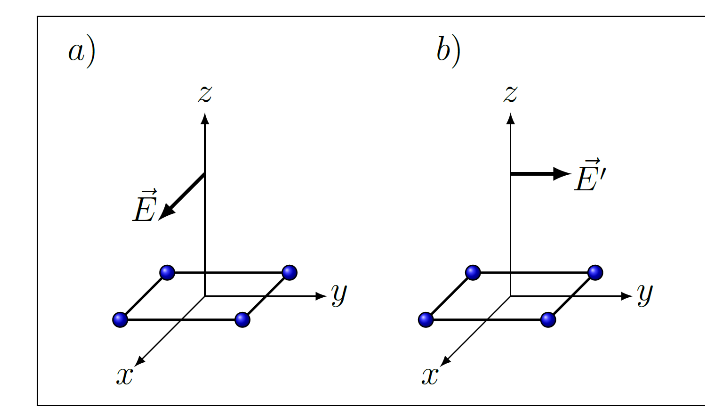


Figura 3.5: En el esquema se representa la misma distribución de cargas de la Figura 3.4, en las dos posiciones indicadas en dicha figura. Aquí se muestra el campo hipotético sobre el eje z, y su forma rotada, incompatibles con la indistinguibilidad derivada de la simetría.

Veamos un modo posible de análisis. Supongamos que un sistema de coordenadas cartesianas se sitúa como indica la Figura 3.5, y estamos interesados en saber "algo" respecto del campo electrostático sobre el eje z. En principio, no sabemos la orientación del campo, por lo que aventuramos que el mismo apunta en el sentido positivo del eje x (Figura 3.5 $a)$). Luego rotamos la distribución un ángulo $\alpha = \pi/2$ alrededor del eje z (Figura 3.5 $b)$). Observemos dos detalles:

- Como el campo está *atado* a la distribución, debe girar con ella, por lo que quedará apuntando en la dirección del eje y.

- Como z es un eje de simetría, la distribución rotada es idéntica a la original. por lo que debe producir exactamente el mismo campo.

Las dos afirmaciones resultan incompatibles, por lo que concluimos que nuestra hipótesis es errónea. Por lo tanto el campo electrostático no podrá tener componente x. El mismo análisis cabe para la componente y, por lo que concluimos que

$$\vec{E}\,(0,0,z) \;=\; E_z\,(z)\;\breve{k} \tag{3.16}$$

Observe que la simetría no permitió la determinación del campo, pero a través de este análisis pudimos determinar dos de las tres componentes. Este tipo de tratamiento es indispensable antes de utilizar la ley de Gauss como recurso para la determinación de un campo.

3.8. Distribuciones con simetría esférica

Una distribución de carga con simetría esférica, es aquella en que la densidad de carga $\delta(\vec{r'})$ depende exclusivamente de la distancia a un centro. Si elegimos como origen de coordenadas a dicho centro, y utilizamos coordenadas esféricas, tenemos que

$$\delta \;=\; \delta\,(r') \tag{3.17}$$

Para analizar la simetría del campo generado por la distribución, consideremos un punto P cualquiera (que no sea el origen), cuya distancia al origen es r. La recta determinada por P y el origen, es un eje de simetría de la distribución. Entonces en P solo sobrevive la componente en la dirección del eje, es decir la componente radial. Por otra parte, cualquier rotación de la distribución debe mantener inalterable el campo en P, por lo que todos los puntos que se encuentren sobre una superficie esférica de radio r centrada en el origen, tendrán la misma componente radial del campo $\vec{E}$. Esto nos permite caracterizar al campo electrostático como

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; E_r\,(r)\,\breve{r} \tag{3.18}$$

Esta conclusión es de crucial importancia para que la ley de Gauss pueda funcionar como recurso para la determinación del campo electrostático. Nótese que

la simetría nos permitió determinar ya dos de las tres componentes esféricas del campo

$$E_\theta(\vec{r}) \;=\; E_\phi(\vec{r}) \;=\; 0 \tag{3.19}$$

Veamos ahora cómo hacer la determinación de $E_r(\vec{r})$. Estamos interesados en conocer la componente radial en el punto P situado en $\vec{r}$, por lo que la distancia al centro es r (coordenada radial). Siempre existe una superficie esférica S centrada en el origen, que pasa por P, cuyo radio es r. ¿Qué nos dice la ley de Gauss? Transcribimos la expresión (3.11)

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \delta\; dv \tag{3.20}$$

donde V es el volumen limitado por S, $\vec{E}$ es de la forma (3.18), δ viene dada por (3.17) y los diferenciales involucrados son

$$\vec{ds} \;=\; ds\;\breve{r} \quad y \quad dv \;=\; 4\pi r'^2\; dr' \tag{3.21}$$

Note que la variable r' recorre todo el dominio entre 0 y r, para cubrir todo el volumen V. Entonces tenemos

$$\oint_S \; E_r(r)\;\breve{r}\;\cdot\; ds\;\breve{r} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\;\int_0^r \;\delta(r')\;\; 4\pi r'^2\; dr' \tag{3.22}$$

En la primera integral podemos observar que el producto escalar opera entre dos versores iguales. Entonces

$$\breve{r}\cdot\breve{r} \;=\; 1 \tag{3.23}$$

En la misma integral, observemos además que, a pesar de que r es una variable, en el dominio de integración constituido por la superficie S, todos los puntos involucrados tienen la “misma" coordenada r. Por tanto, la componente $E_r(r)$ es constante a los fines de esta integración. Entonces

$$E_r(r)\;\oint_S \; ds \;=\; \frac{4\pi}{\epsilon_0}\;\int_0^r \; r'^2\;\delta(r')\;\; dr' \tag{3.24}$$

La integral de superficie representa el área de la superficie esférica de radio r, por lo que tenemos

$$E_r\left(r\right)\ 4\pi r^2\ =\ \frac{4\pi}{\epsilon_0}\ \int_0^r\ r'^2\ \delta\left(r'\right)\ dr' \tag{3.25}$$

Finalmente

$$E_r\left(r\right)\ =\ \frac{1}{\epsilon_0\ r^2}\ \int_0^r\ r'^2\ \delta\left(r'\right)\ dr' \tag{3.26}$$

Este análisis es válido para todas las distribuciones de carga cuya densidad volumétrica tiene simetría esferica. Sin embargo, algunas veces conviene trabajar con una expresión equivalente, que puede resultar más intuitiva

$$E_r\left(r\right)\ =\ \frac{Q_{RS}}{4\pi\epsilon_0\ r^2} \tag{3.27}$$

donde Q_{RS} representa la carga residente en el volumen V interior a la superficie S.

3.9. Ejemplo de aplicación

Consideremos una esfera de radio R con carga Q uniformemente distribuida en su volumen. Su densidad constante será

$$\delta_0\ =\ \frac{3Q}{4\pi R^3} \tag{3.28}$$

Supongamos primero que $r < R$, por lo que la superfice esférica imaginaria utilizada para aplicar la ley de Gauss está dentro de la región de cargas. Aplicamos (3.26) observando que δ es constante. Entonces

$$E_r\left(r\right)\ =\ \frac{\delta_0}{\epsilon_0\ r^2}\ \int_0^r\ r'^2\ dr' \tag{3.29}$$

Resolviendo la integral tenemos

$$E_r(r) = \frac{\delta_0}{\epsilon_0\, r^2}\frac{r^3}{3} \tag{3.30}$$

Reemplazando δ_0 por (3.28) y simplificando obtenemos

$$E_r(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0\, R^3} \tag{3.31}$$

Ahora tratamos el caso $r > R$. Aquí observamos que toda la carga de la distribución queda dentro de la superficie gaussiana. Por tanto conviene utilizar (3.27), haciendo que $Q_{RS} = Q$. Entonces

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2} \tag{3.32}$$

El resultado final del problema se obtiene combinando (3.31) y (3.33), confiriéndole carácter vectorial

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0\, R^3}\,\breve{r} & \text{si } r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\,\breve{r} & \text{si } r > R \end{cases} \tag{3.33}$$

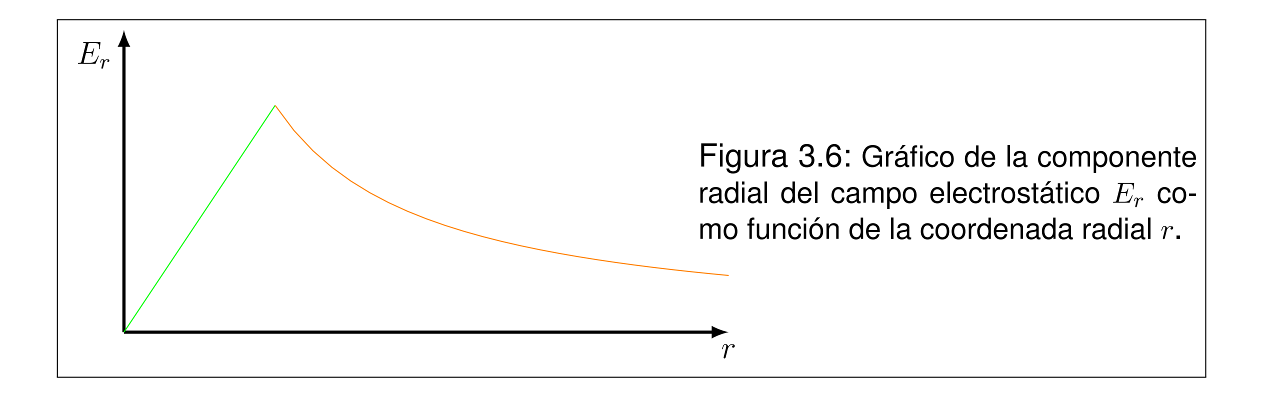


Figura 3.6: Gráfico de la componente radial del campo electrostático E_r como función de la coordenada radial r.

3.10. Distribuciones con simetría cilíndrica

Los sistemas con simetría cilíndrica solo existen en el mundo de los modelos, ya que se trata de objetos infinitamente largos. Entonces comencemos por imaginar una distribución de carga que se extiende infinitamente a lo largo del eje z. Utilizando coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z, decimos que la distribución tiene simetría cilíndrica cuando la densidad volumétrica de carga es solo función de la coordenada ρ:

$$\delta(\vec{r'}) \;=\; \delta\left(\rho'\right) \tag{3.34}$$

Analicemos ahora la simetría del campo electrostático. Para ello elegimos un punto P cualquiera que no pertenezca al eje z, y trazamos una recta que corte perpendicularmente al eje z pasando por P. Ahora tratemos de convencernos de que dicha recta es un eje de simetría. Para ello observemos simplemente que si rotamos la distribución en un ángulo $\alpha = \pi$ alrededor de la recta, el aspecto de la distribución rotada coincide exactamente con el aspecto original. Entonces podemos concluir que la única componente no nula del campo es E_ρ. Por otra parte, desplazamientos de la distribución a lo largo del eje z, o rotaciones de cualquier ángulo alrededor del mismo, no alteran el campo en P. Por lo tanto, la componente E_ρ es la misma sobre una superficie cilíndrica de radio ρ centrada en el eje z. En otras palabras, E_ρ solo depende de la coordenada ρ. Entonces

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_\rho\left(\rho\right) \\ E_\phi &= 0 \\ E_z &= 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

O en forma vectorial

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) \;=\; E_\rho\left(\rho\right)\; \breve{\rho} \tag{3.36}$$

Ahora nos disponemos a buscar el campo electrostático, en el punto P (cuya coordenada radial es ρ), mediante la ley de Gauss. Para ello elegimos una superficie cilíndrica de radio ρ y longitud l, coaxial con la distribución. Para que la superficie sea cerrada, la completamos con dos tapas circulares en los extremos (ver Figura 3.7). A las tres partes que componen la superficie cerrada S las llamaremos respectivamente S_C, S_{T1} y S_{T2}, de modo que

$$S \;=\; S_C \; U \; S_{T1} \; U \; S_{T2} \tag{3.37}$$

Los vectores normales exteriores a cada parte de la superficie S son de las for-

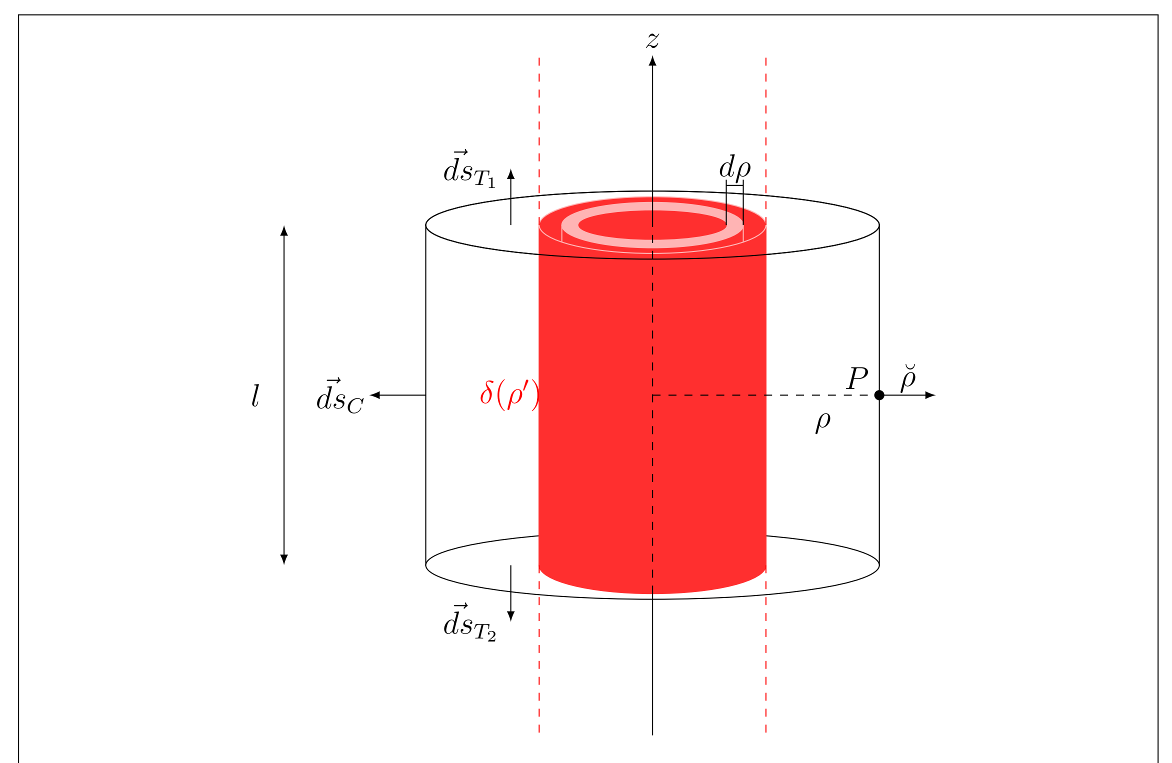


Figura 3.7: Ilustración correspondiente al uso de la ley de Gauss para el caso de distribuciones con simetría cilíndrica (ver el texto principal).

mas siguientes

$$\begin{aligned} \vec{ds}_C &= ds_C\,\breve{\rho} \\ \vec{ds}_{T1} &= -ds_{T1}\,\breve{k} \\ \vec{ds}_{T2} &= ds_{T2}\,\breve{k} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Por su parte, los diferenciales de volumen de la distribución, que quedan dentro de la superficie cerrada S, pueden escribirse como sigue

$$dv = 2\pi l \rho'\, d\rho' \tag{3.39}$$

Aquí estamos en condiciones de aplicar la ley de Gauss (3.11), que toma la forma

$$\oint_S E_\rho(\rho)\,\breve{\rho}\cdot\vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \delta(\rho')\;2\pi l\rho'\,d\rho' \tag{3.40}$$

En virtud de (3.37) la integral de superficie puede separarse en tres partes. En-

tonces

$$\int_{S_C} E_\rho(\rho)\,\breve{\rho}\cdot\vec{ds}_C \;+\; \int_{S_{T1}} E_\rho(\rho)\,\breve{\rho}\cdot\vec{ds}_{T1} \;+$$
$$+\;\int_{S_{T2}} E_\rho(\rho)\,\breve{\rho}\cdot\vec{ds}_{T2} \;=\; \frac{2\pi l}{\epsilon_0}\int_0^\rho \rho'\delta(\rho')\;d\rho'$$

$$\int_{S_C} E_\rho(\rho)\,\breve{\rho}\cdot ds_C\breve{\rho} \;+\; \int_{S_{T1}} E_\rho(\rho)\,\breve{\rho}\cdot\left(-ds_{T1}\breve{k}\right) \;+$$
$$+\;\int_{S_{T2}} E_\rho(\rho)\,\breve{\rho}\cdot ds_{T2}\breve{k} \;=\; \frac{2\pi l}{\epsilon_0}\int_0^\rho \rho'\delta(\rho')\;d\rho' \tag{3.41}$$

Los productos escalares que aparecen en las integrales de superficie son

$$\breve{\rho}\cdot\breve{\rho} \;=\; 1 \qquad \breve{\rho}\cdot\breve{k} \;=\; 0 \tag{3.42}$$

con lo que las integrales sobre las tapas S_{T1} y S_{T2} son nulas. Entonces tenemos

$$\int_{S_C} E_\rho(\rho)\,ds_C \;=\; \frac{2\pi l}{\epsilon_0}\int_0^\rho \rho'\delta(\rho')\;d\rho' \tag{3.43}$$

Ahora observemos que todos los puntos de la superficie de integración S_C tienen la misma coordenada ρ, por lo que la componente $E_\rho(\rho)$ es constante sobre S_C. Entonces podemos extraer la componente de la integral

$$E_\rho(\rho)\int_{S_C} ds_C \;=\; \frac{2\pi l}{\epsilon_0}\int_0^\rho \rho'\delta(\rho')\;d\rho' \tag{3.44}$$

La integral de superficie que nos queda puede interpretarse como el área de la superficie S_C. Entonces

$$E_\rho(\rho)\;2\pi l\rho \;=\; \frac{2\pi l}{\epsilon_0}\int_0^\rho \rho'\delta(\rho')\;d\rho' \tag{3.45}$$

Con lo que finalmente tenemos

$$E_\rho(\rho) \;=\; \frac{1}{\epsilon_0\;\rho}\int_0^\rho \rho'\delta(\rho')\;d\rho' \tag{3.46}$$

Observe que desapareció el parámetro l (como era de esperarse), dado que el mismo es completamente artificial en relación con el modelo de distribución de carga.

3.11. Ejemplo de aplicación

Consideremos un cuerpo cilíndrico macizo de radio R infinitamente largo, que posee una densidad volumétrica de carga dada por

$$\delta\left(\rho'\right) \;=\; a\,\rho'^{2} \qquad \left(\rho' < R\right) \tag{3.47}$$

Aquí tenemos que analizar dos situaciones. Primero tratamos el caso en que el punto P está dentro del cuerpo cilíndrico ($\rho < R$). Por aplicación de (3.46) tenemos

$$E_{\rho}\left(\rho\right) \;=\; \frac{a}{\epsilon_0\,\rho}\int_0^{\rho}\rho'^{3}\,d\rho' \;=\; \frac{a}{\epsilon_0\,\rho}\,\frac{\rho^4}{4} \;=\; \frac{a\rho^3}{4\,\epsilon_0} \tag{3.48}$$

Ahora veamos qué ocurre si P está fuera del cuerpo ($\rho > R$). Nuevamente aplicamos (3.46), pero observando que la contribución a la carga requiere integrar desde cero hasta R, dado que más alla de R no hay carga (densidad nula). Entonces

$$E_{\rho}\left(\rho\right) \;=\; \frac{a}{\epsilon_0\,\rho}\int_0^{R}\rho'^{3}\,d\rho' \;=\; \frac{a}{\epsilon_0\,\rho}\,\frac{R^4}{4} \;=\; \frac{aR^4}{4\epsilon_0\,\rho} \tag{3.49}$$

El resultado final, incluyendo el caracter vectorial del campo será

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) \;=\; \begin{cases} \dfrac{a\rho^3}{4\,\epsilon_0}\breve{\rho} & \text{si } \rho < R \\ \dfrac{aR^4}{4\epsilon_0\,\rho}\breve{\rho} & \text{si } \rho > R \end{cases} \tag{3.50}$$

3.12. Distribuciones con simetría plana

La simetría plana es otro caso que solo ocurre en el mundo de los modelos, ya que se trata de distribuciones infinitamente extendidas. Para caracterizar estas distribuciones utilizamos coordenadas cartesianas, y decimos que la densidad volumétrica de carga solo depende de una de dichas coordenadas, por ejemplo z'. Entonces tenemos

$$\delta(\vec{r'}) = \delta(z') \tag{3.51}$$

Para analizar la simetría del campo electrostático, usamos la misma estrategia que en los casos anteriores. Esto es, tratamos de encontrar un eje de simetría de la distribución. Para ello, elegimos un punto P cualquiera y hacemos pasar por él una recta paralela al eje z. Luego observamos que si la distribución de carga rota un ángulo cualquiera alrededor de la recta, el aspecto de la distribución rotada coincide con su aspecto original. Entonces la recta constituye un eje de simetría, y por tanto la única componente que sobrevive en P es E_z. Por otra parte, si la distribución se desplaza paralelamente al plano xy, el campo en P debe permanecer invariante, por lo que el campo debe tener idéntica componente E_z sobre todo el plano paralelo a xy que contiene a P. Esto significa que la componente E_z no puede depender de las coordenadas x e y. Entonces

$$E_x = E_y = 0 \qquad E_z = E_z(z) \tag{3.52}$$

Aunque esta información es análoga a la de los casos de simetría tratados anteriormente, la aplicación de la ley de Gauss para la determinación del campo electrostático es posible, pero en general no inmediata. En este caso será necesario definir una distribución elemental a modo de “prototipo", determinar su contribución al campo, y luego resolver aplicando el Principio de Superposición. Afortunadamente, este cálculo es bastante sencillo, por lo que lo abordaremos a continuación.

Para comenzar, trataremos un caso particular que servirá como “prototipo" para tratamientos posteriores. Consideremos una distribución de carga contenida en un plano infinitamente extendido, cuya densidad superficial de carga uniforme es σ. Observe que su simetría corresponde al caso que tratamos, por lo que el campo que genera tiene las componentes dadas por (3.52). Nos proponemos calcular la componente E_z del campo electrostático en un punto P, situado a una distancia z del plano de la distribución. Por sencillez elegimos el origen sobre el plano de carga, de modo que el mismo coincida con el plano $x-y$, y el eje z pase por P.

Para aplicar la ley de Gauss, elegimos una superficie cilíndrica S_C de longitud $2z$ y radio cualquiera, cuyo eje coincida con el eje z, y se extiende simétricamente a cada lado de la distribución. Para que la superficie sea cerrada, completamos con dos tapas circulares T_1 y T_2, paralelas al plano $x-y$, situadas respectivamente en $-z$ y z. De este modo, la superficie cerrada S se compone como sigue (ver Figura 3.8)

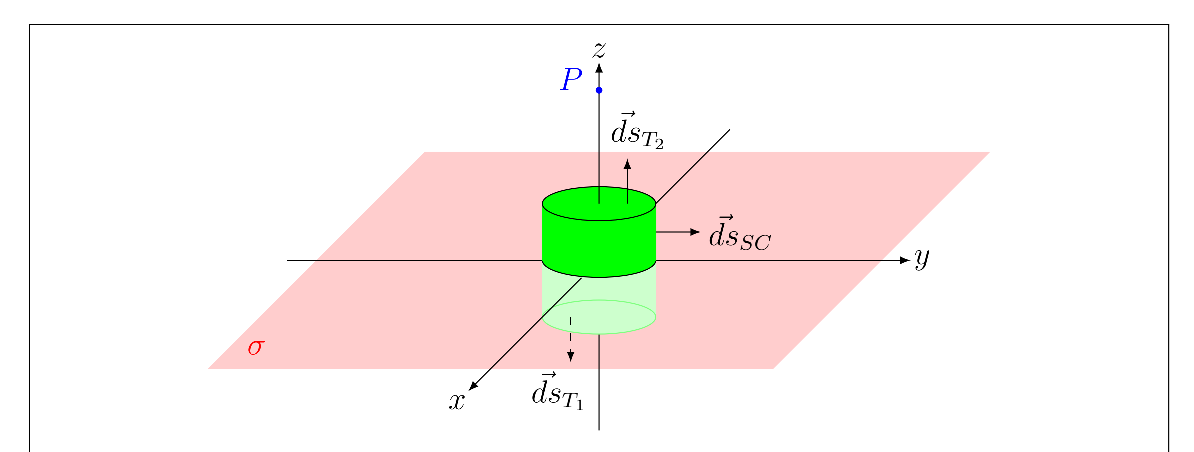


Figura 3.8: Ilustración correspondiente al uso de la ley de Gauss para el caso de distribuciones con simetría plana (ver el texto principal).

$$S = S_C \cup T_1 \cup T_2 \tag{3.53}$$

y los respectivos vectores diferenciales normales exteriores son

$$\vec{ds}_{SC} = ds_{S_C}\,\breve{\rho} \qquad \vec{ds}_{T1} = -ds_{T_1}\,\breve{k} \qquad \vec{ds}_{T2} = ds_{T_2}\,\breve{k} \tag{3.54}$$

Ahora observemos un detalle de simetría. Si la distribución se gira un ángulo $\alpha = \pi$ alrededor del eje x, la distribución rotada y la original tienen el mismo aspecto. Por lo tanto en P se debe observar el mismo campo. Pero como el campo está "atado" a la distribución, su estructura a un lado del plano $x - y$, debe ser una imagen especular de la estructura del otro lado. Esto es

$$E_z\,(-z)\,\breve{k} = -E_z\,(z)\,\breve{k} \tag{3.55}$$

Nótese que esta propiedad solo vale para el prototipo, de modo que no hubiéramos podido aplicarla para cualquier distribución con simetría plana.

Ahora estamos en condiciones de utilizar la ley de Gauss dada por la expresión (3.11).

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \tag{3.56}$$

Reemplazando (3.52), (3.53) y (3.54) en (3.56), tenemos

$$\int_{S_C} E_z(z)\,\breve{k}\cdot\vec{ds}_{SC} + \int_{T_1} E_z(-z)\,\breve{k}\cdot\vec{ds}_{T1} + \int_{T_2} E_z(z)\,\breve{k}\cdot\vec{ds}_{T2} = \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \tag{3.57}$$

Aplicando la condición de simetría (3.55) y detallando los versores involucrados en los diferenciales de superficie, tenemos

$$\int_{S_C} E_z(z)\,\breve{k}\cdot ds_{SC}\,\breve{\rho} \;-\; \int_{T_1} E_z(z)\,\breve{k}\cdot\left(-ds_{T1}\,\breve{k}\right) \;+ \\ + \int_{T_2} E_z(z)\,\breve{k}\cdot ds_{T2}\,\breve{k} \;=\; \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \tag{3.58}$$

Resolviendo los productos escalares entre versores, observamos que la primera integral es nula.

$$\int_{T_1} E_z(z)\;ds_{T1} \;+\; \int_{T_2} E_z(z)\;ds_{T2} \;=\; \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \tag{3.59}$$

Como las tapas T_1 y T_2 tienen todos sus puntos a la misma distancia del plano de cargas, los integrandos son constantes. Entonces

$$E_z(z)\;\int_{T_1} ds_{T1} \;+\; E_z(z)\;\int_{T_2} ds_{T2} \;=\; \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \tag{3.60}$$

Las integrales representan las áreas de las tapas. Las mismas son iguales y coinciden además con el área de la fracción del plano de cargas que hay dentro de la superficie S. A todas estas áreas las llamamos A. Entonces

$$E_z(z)\;A \;+\; E_z(z)\;A \;=\; \frac{\sigma\;A}{\epsilon_0} \tag{3.61}$$

Con lo que finalmente concluimos que

$$E_z(z) \;=\; \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{3.62}$$

Note que el resultado es independiente de la localización z del punto P. Teniendo en cuenta la simetría (3.55), la forma vectorial final es

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z < 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z > 0 \end{cases} \tag{3.63}$$

Para que el prototipo adquiera generalidad operativa, conviene plantearlo en una localización arbitraria z', con lo que (3.63) toma la siguiente forma general

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z < z' \\ \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z > z' \end{cases} \tag{3.64}$$

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z < z' \\ \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si } \; z > z' \end{cases} \tag{3.65}$$

O, en la versión más compacta

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\, sgn\,(z - z')\;\breve{k}. \tag{3.66}$$

3.13. Ejemplo de aplicación

Consideremos una placa plana infinitamente extendida, cuyo espesor es d. La densidad volumétrica de carga es δ (uniforme). La simetría de la distribución admite un tratamiento por superposición de campos del tipo (3.66). Podemos elegir el origen de coordenadas dentro de la placa, en un punto equidistante de sus caras. Imaginemos ahora una porción infinitesimalmente delgada de la placa, situada entre z' y $z' + dz'$. La carga contenida en dicha porción contribuirá al campo en cualquier punto $\vec{r}$ con el formato (3.66). Esto es

$$d\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; \frac{\delta\, dz'}{2\epsilon_0}\, sgn\,(z - z')\;\breve{k} \tag{3.67}$$

Luego, el resultado se obtiene por integración sobre toda la placa. Formalmente resulta

$$\vec{E}\,(\vec{r}) \;=\; \frac{\delta\,\breve{k}}{2\epsilon_0}\;\int_{-d/2}^{d/2} sgn\,(z-z')\;dz' \tag{3.68}$$

La integración es muy simple. Sin embargo, conviene advertir al lector que deben tratarse por separado tres casos: primero cuando $z < -d/2$, luego cuando $-d/2 < z < d/2$ y finalmente cuado $z > d/2$. Con un poquito de cuidado se obtiene que

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{\delta\,d}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si} \qquad z < -\dfrac{d}{2} \\ \dfrac{\delta\,z}{\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si} \quad -\dfrac{d}{2} < z < \dfrac{d}{2} \\ \dfrac{\delta\,d}{2\epsilon_0}\,\breve{k} & \text{si} \qquad z > \dfrac{d}{2} \end{cases} \tag{3.69}$$

3.14. Problemas

1. Considere una superficie semiesférica de radio $R = 16$ cm, tal que su curva límite (que por supuesto, es una circunferencia) se encuentra sobre el plano $x - y$. En la región yace un campo electrostático uniforme orientado en el sentido positivo del eje z, dado por

$$\vec{E} = (\,0\,\text{N/C},\ 0\,\text{N/C},\ 40\,\text{N/C})$$

   a) Calcule el flujo del campo electrostático a través de la superficie indicada.

   b) Repita el análisis si se considera una superficie esférica completa.

2. La posición en la que se encuentra una partícula que aloja una carga de $50\ \mu$C se elige como origen de coordenadas. Una superficie circular de 4 cm de radio se sitúa con su centro sobre el eje z y en posición paralela al plano $x - y$, a 12 cm del mismo. Calcule la integral de flujo del campo electrostático producido por la carga de la partícula, a través de la superficie indicada.

3. Los dos problemas anteriores pueden simplificarse mucho si aprovechamos en la resolución los buenos oficios de la ley de Gauss. Reflexione de qué manera puede aprovecharse en estos casos y verifique que conduce a los mismos resultados.

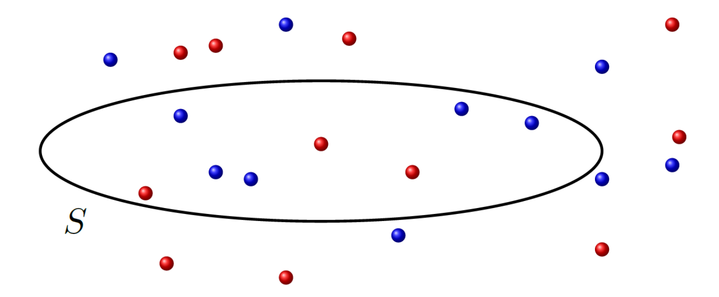
4. Considere una pirámide imaginaria de base cuadrada de lado L y altura $L/2$. Suponga que una partícula puntual de carga Q se halla rígidamente emplazada en la cúspide de la pirámide. Determine el flujo del campo electrostático a través de la base y de cada cara lateral de la pirámide.

5. En cierta región del espacio existe un campo electrostático uniforme de módulo $E_0 = 24,6$ N/C. Un marco cuadrado imaginario de 10 cm de lado, yace en dicha región, orientado de modo que la normal al plano que lo contiene forma un ángulo de 33° con la dirección del campo. Determine el flujo del campo electrostático a través de “cada una" de las infinitas superficies imaginarias limitadas por el marco.

6. La figura siguiente representa una superficie cerrada imaginaria S, situada en una región del espacio donde yacen partículas cargadas en posiciones fijas. Los círculos llenos representan partículas con carga positiva de $20\ \mu$C, y los vacíos partículas negativas de $30\ \mu$C.

   a) ¿Cuál es el flujo del campo electrostático a través de la superficie S?

   b) ¿Es posible establecer que en alguna zona de la superficie S, exista flujo saliente? Justifique cualitativamente.



7. Considere una esfera de radio R, que posee una carga Q uniformemente distribuida en su volumen. Sea S una superficie esférica imaginaria de radio $3R$, situada concéntricamente con la primera. Determine el flujo de campo electrostático a través de S, y estime si se observarán cambios de flujo en los siguientes casos (si la respuesta es afirmativa, recalcule el flujo).

   a) Si el radio de S se reduce a $2R$.

   b) Si el radio de S se reduce a $R/2$.

   c) Si S adquiere una forma irregular manteniéndose exterior a la esfera que contiene la carga.

   d) Si S mantiene su radio original, pero su centro se desplaza una distancia R del centro de la esfera cargada.

   e) La misma situación del apartado d pero con una distancia $5R$ entre centros.

   f) Si en la situación original, se agrega una segunda esfera idéntica a la primera y con igual carga, con su centro situado a $5R$ del centro de la primera.

   g) Si en el montaje inicial se redistribuye la carga dentro de la esfera, en forma irregular.

8. Evalúe si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique sus respuestas[5].

   a) La ley de Gauss es válida solo en el caso de distribuciones de carga simétricas.

   b) El campo electrostático involucrado en la ley de Gauss, es debido exclusivamente a las cargas que se encuentran dentro de la superficie gaussiana.

   c) Si en el interior de cierta superficie cerrada S, no hay cargas eléctricas, entonces el campo electrostático es nulo en todos los puntos de la superficie S.

   d) Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es nulo, entonces el campo electrostático es nulo en todos los puntos de S.

[5]En caso que su respuesta sea “verdadero", su justificación debe ser un razonamiento general basado en leyes o principios físicos. Si su respuesta es “falso", como justificación bastará un contraejemplo.

e) Si el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es nulo, entonces no hay cargas distribuidas en el volumen interior a S.

9. Dos esferas iguales de radio $R = 5$ cm uniformemente cargadas con densidad $\rho = 30\ \mu$C/cm^3, se encuentran emplazadas con sus centros separados 15 cm. Utilice la ley de Gauss y el principio de superposición para establecer el campo electrostático en un punto que se encuentra a 3cm del centro de una de las esferas, medidos perpendicularmente a la línea que une los centros[6].

10. La densidad volumétrica de carga en un cuerpo esférico viene dada por

$$\delta\left(r'\right) \; = \; \begin{cases} C\, r'^2 & \text{si} \quad r' < R \\ 0 & \text{si} \quad r' > R \end{cases}$$

siendo C una constante positiva. Determine el campo electrostático en todo el espacio como función de la coordenada radial r.

11. Una corteza cilíndrica infinitamente larga, posee radios interior $R_1 = 4$cm y exterior $R_2 = 6$ cm (imagine la geometría de un caño). En la parte material, existe carga uniformemente distribuida con densidad δ. En un punto situado a 10 cm del eje del sistema, el campo electrostático tiene un módulo de 20 N/C, y apunta en dirección radial hacia el eje.

    a) Determine la densidad volumétrica de carga δ.

    b) Encuentre expresiones para el campo electrostático en todo el espacio.

12. Una lámina no conductora plana bastante grande, con densidad superficial de carga uniforme σ, se encuentra emplazada en posición vertical. Una bolita plástica de masa m posee una carga eléctrica Q del mismo signo que la carga de la lámina. La bolita cuelga de un punto de la lámina mediante un hilo no conductor de masa despreciable y longitud l. En condiciones electrostáticas, determine el ángulo que forman el hilo y la lámina.

[6]Este problema supone una condición irreal, debido a que la sola presencia de las esferas, produce efectos mutuos de polarización que modificarían la uniformidad de la densidad de carga. A sabiendas de esto, proponemos que el estudiante resuelva el problema sin tener en cuenta dicho efecto, para evitar la complejidad que resultaría inabordable ahora.

Capítulo 4
Potencial electrostático

4.1. Repaso sobre conceptos mecánicos básicos

a) Trabajo: Supongamos que una partícula se encuentra en una región del espacio en la que existe un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. Sean $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ las posiciones de dos puntos de la región, y sea C una curva simple orientada, que comienza en $\vec{r_1}$ y termina en $\vec{r_2}$ (ver Figura 4.1). Ahora subdividimos la curva en segmentos diferencialmente pequeños. En cada uno de dichos segmentos, definimos un vector $\vec{dl}$ cuyo módulo coincide con la longitud del segmento, su dirección es tangente a la curva C en el segmento y su sentido coincide con la orientación de la curva. Supongamos ahora que la partícula se mueve sobre C desde $\vec{r_1}$ hasta $\vec{r_2}$[1].

Entonces definimos el trabajo asociado a la fuerza $\vec{F}$ realizado sobre la partícula a lo largo de la curva C como

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \int_{C\;\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\cdot\vec{dl} \tag{4.1}$$

Como ejemplo consideremos el caso en que una fuerza constante actúa sobre una partícula que se mueve en línea recta. Si elegimos que la trayectoria de la partícula coincida con el eje x, y que su desplazamiento comience en $x = 0$ y termine en $x = d$, tendremos que los vectores $\vec{dl}$ serán de la forma

$$\vec{dl} \;=\; (dx, 0, 0) \tag{4.2}$$

[1]En la mayor parte de los casos será necesario que actúen otras fuerzas además de $\vec{F}$ para que la partícula recorra una curva especificada. Sin embargo, no resulta relevante la existencia de estas fuerzas para los objetivos de esta sección.

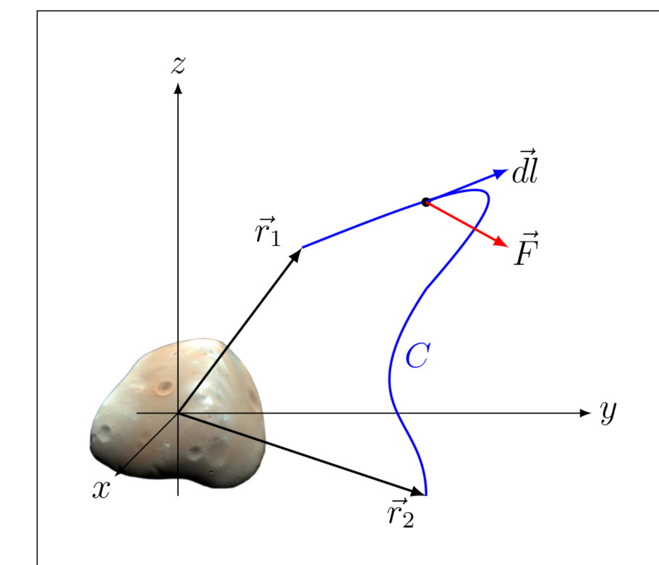


Figura 4.1: Escenario para la definición del trabajo de una fuerza. Se trata de una curva C que se extiende entre los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Sobre ella se definen los vectores tangentes $\vec{dl}$.

Entonces el trabajo de la fuerza F sobre la partícula será

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \int_{C\ \vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\cdot\vec{dl} \;=\; \int_0^d (F_x, F_y, F_z)\cdot(dx,0,0) \tag{4.3}$$

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \int_0^d F_x\,dx \;=\; F_x \int_0^d dx \;=\; F_x d \tag{4.4}$$

Esta última expresión es ampliamente difundida en textos básicos de física, por lo que conviene recalcar que solo constituye un resultado particular cuya aplicabilidad es muy limitada.

b) Fuerzas conservativas: Consideremos nuevamente un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ y una partícula bajo su influencia. Consideremos también una curva simple cerrada C, sobre la que la partícula es obligada a moverse. Entonces, si para toda curva cerrada C el trabajo de $\vec{F}$ sobre la partícula es nulo,

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \oint_C \vec{F}\cdot\vec{dl} \;=\; 0 \tag{4.5}$$

decimos que $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas. Una consecuencia inmediata con grandes ventajas operativas puede obtenerse por aplicación del teorema de Stokes. Esto es, $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas si y solo si en toda la región vale que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \;=\; 0 \tag{4.6}$$

Entre los ejemplos más básicos de fuerzas conservativas podemos citar la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre los objetos de su entorno, y la fuerza elástica ejercida por un resorte sobre un objeto acoplado a él.

El término *fuerza conservativa* alude al hecho que las fuerzas que poseen esta propiedad no operan en detrimento de la energía mecánica de la partícula, y por tanto cabe caracterizarlas por su capacidad para conservar dicha energía.

c) Independencia de caminos: Una consecuencia inmediata de la definición de fuerza conservativa es la independencia de caminos. Sean C_a y C_b dos curvas cualesquiera, tales que ambas comienzan en $\vec{r_1}$ y terminan en $\vec{r_2}$. Entonces, Si $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas conservativas se cumple que

$$W_{\vec{F}C_a} \;=\; W_{\vec{F}C_b} \quad \rightarrow \quad \int_{C_a\ \vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \;=\; \int_{C_b\ \vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{4.7}$$

d) Energía potencial: Si un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo, entonces es posible definir una energía potencial $U_{\vec{F}}$ asociada a dicho campo, tal que

$$\vec{F} \;=\; -\vec{\nabla} U_{\vec{F}} \tag{4.8}$$

Una representación del gradiente en coordenadas cartesianas será

$$\vec{F} \;=\; -\left(\frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial x} \;,\; \frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial y} \;,\; \frac{\partial U_{\vec{F}}}{\partial z} \right) \tag{4.9}$$

En los ejemplos mencionados de fuerzas conservativas, puede observarse esta relación. Para la fuerza gravitatoria $\vec{P}$ (en notación habitual) tenemos que

$$U_{\vec{P}} \;=\; mgy \quad \rightarrow \quad \vec{P} \;=\; (0 \;,\; -mg \;,\; 0) \tag{4.10}$$

Por su parte, en el caso de la fuerza elástica de un resorte se cumple que

$$U_{\vec{F}_e} \ = \ \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_e \ = \ (-kx \ , \ 0 \ , \ 0) \qquad (4.11)$$

Ahora proponemos una definición formal para la energía potencial, a partir del campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. Sea $\vec{r}_{ref}$ un punto arbitrariamente elegido en la región donde existe el campo de fuerzas conservativas $\vec{F}(\vec{r})$. A dicho punto lo llamaremos en lo sucesivo **punto de referencia**. Sea $\vec{r}$ un punto genérico de la misma región y sea C una curva cualquiera que se inicia en $\vec{r}_{ref}$ y termina en $\vec{r}$. Supongamos ahora que una partícula es transportada cuasiestáticamente a lo largo de C bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$ y otra que la contrarresta punto a punto, $\vec{F}_{EXT}$, ejercida por un agente externo de modo que

$$\vec{F}_{EXT}(\vec{r'}) \ = \ -\vec{F}(\vec{r'}) \qquad (4.12)$$

para todos los puntos $\vec{r'}$ pertenecientes a C. Entonces, la energía potencial $U_{\vec{F}}(\vec{r})$ asociada a la fuerza $\vec{F}$, adquirida por la partícula cuando la misma se encuentra en el punto $\vec{r}$, coincide con el trabajo que debe realizar el agente externo para transportar cuasiestáticamente la partícula desde el punto de referencia hasta el punto $\vec{r}$.

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \ = \ W_{\vec{F}_{EXT}C} \ = \ \int_{C \ \vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F}_{EXT} \cdot \vec{dl} \qquad (4.13)$$

Una consecuencia inmediata es que

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \ = \ -W_{\vec{F}C} \ = \ -\int_{C \ \vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \qquad (4.14)$$

e) Extensiones terminológicas: En el mundo matemático se ha adoptado la terminología surgida de la mecánica para aplicarla a campos en general. Así tendremos que a un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ de cualquier naturaleza se lo llamará “conservativo", si para toda curva cerrada C satisface

$$\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \ 0 \qquad (4.15)$$

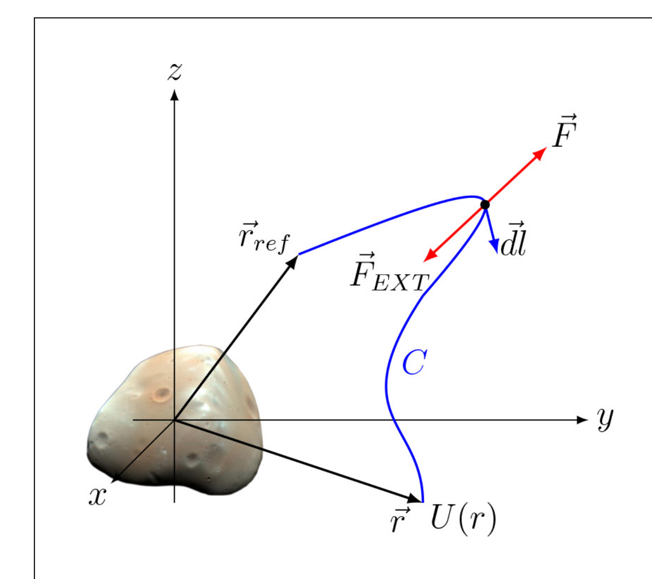


Figura 4.2: Escenario para la definición de la energía potencial. Se trata de una curva C que comienza en la posición de referencia $\vec{r}_{ref}$ y termina en $\vec{r}$. La energía potencial es el trabajo cuasiestático de la fuerza $\vec{F}_{EXT}$.

Entonces existirá un campo escalar $h_{\vec{A}}(\vec{r})$ llamado generalmente “potencial" asociado al campo $\vec{A}$, que satisface

$$\vec{A} \;=\; -\vec{\nabla} h_{\vec{A}} \tag{4.16}$$

Sugerimos que el lector reflexione sobre la terminología, porque la misma se presta a confusiones, especialmente cuando la naturaleza del campo vectorial ya no pueda identificarse con una fuerza.

4.2. ¿Será conservativa la fuerza electrostática?

Para contestar esta pregunta podríamos proceder de un modo muy simple, evaluando el rotor del campo electrostático producido por una carga puntual. En primer lugar observemos que el campo electrostático producido por una carga puntual tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; E(r)\breve{r} \tag{4.17}$$

Cuando los campos presentan estos tipos de simetría se los llama **campos centrales**. Teniendo en cuenta la definición de rotor en coordenadas esféricas se deduce que el mismo es nulo en todas partes. Luego extendemos esta conclusión mediante el Principio de Superposición, al campo producido por cualquier

distribución de cargas. Con lo que se concluye que el campo electrostático es conservativo.

Ahora recordemos que la fuerza electrostática sobre una partícula con carga q, está relacionada con el campo electrostático mediante

$$\vec{F} \ = \ q\vec{E} \tag{4.18}$$

Entonces, es inmediato que si $\vec{E}$ es un campo conservativo, la fuerza $\vec{F}$ también lo será.

4.3. Energía potencial electrostática

Como la fuerza electrostática es conservativa, debe existir una energía potencial electrostática asociada que satisfaga

$$\vec{F} \ = \ -\vec{\nabla} U_{\vec{F}} \tag{4.19}$$

Siguiendo los lineamientos sugeridos para fuerzas conservativas en general, podemos definir la energía potencial electrostática como sigue. Sean $\vec{r}_{ref}$ y $\vec{r}$ un punto de referencia y un punto genérico respectivamente. Supongamos que una partícula cargada es trasladada desde $\vec{r}_{ref}$ hasta $\vec{r}$ bajo la acción de un campo electrostático y un agente externo. Entonces la energía potencial electrostática adquirida por la partícula al alcanzar el punto $\vec{r}$, es igual al trabajo realizado por el agente externo para transportarla cuasiestáticamentente a lo largo de cualquier curva desde $\vec{r}_{ref}$ hasta $\vec{r}$

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \ = \ W_{\vec{F}_{EXT}C} \ = \ \int_{C \ \vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F}_{EXT} \cdot \vec{dl} \tag{4.20}$$

Una consecuencia inmediata es que

$$U_{\vec{F}}(\vec{r}) \ = \ -W_{\vec{F}C} \ = \ -\int_{C \ \vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \vec{dl} \tag{4.21}$$

4.4. Concepto de potencial electrostático

Ahora centremos nuestra atención en que el campo electrostático es conservativo. Entonces debe existir un potencial electrostático asociado (campo escalar), al que llamaremos $V(\vec{r})$, que debe cumplir

$$\vec{E} \;=\; -\vec{\nabla} V \tag{4.22}$$

La definición de V es análoga a la de $U_{\vec{F}}$, y por tanto puede calcularse a partir del campo electrostático $\vec{E}$ como sigue

$$V(\vec{r}) \;=\; -\int_{C\ \vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} \tag{4.23}$$

Observe que multiplicando ambos miembros por la carga de la partícula se puede recuperar la expresión para la energía potencial electrostática. En tal sentido, podemos decir que el potencial electrostático es una propiedad del espacio que representa la energía potencial electrostática por unidad de carga que habría de adquirir una partícula cargada que se sitúa en el punto considerado. La unidad de potencial electrostático es el “Volt" (o Voltio) que se representa por la letra V. Su relación con las otra unidades del sistema MKS es

$$V \;=\; \frac{J}{C} \;=\; \frac{Nm}{C} \tag{4.24}$$

Aquí conviene enfatizar que el potencial, de la misma manera que el campo electrostático, constituye una propiedad del espacio. Esto significa que será necesario que algún objeto sensible se sitúe en el espacio dotado de un potencial electrostático, para que se verifiquen efectos observables.

Por último observemos que la expresión (4.23) constituye un método de cálculo para el potencial electrostático. En efecto, si se ha determinado el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ en un conjunto conexo de puntos que contenga a $\vec{r}_{ref}$ y a $\vec{r}$, la mencionada expresión permite calcular $V(\vec{r})$. Sin embargo, este no es el único método, ya que el potencial también puede deducirse a partir del conocimiento detallado de la distribución de cargas.

4.5. Superficies equipotenciales

El potencial electrostático es una propiedad escalar continua, definida en el espacio tridimensional. Como ocurre siempre con los campos escalares tridimensionales regulares, es posible definir una familia de superficies llamadas equipotenciales, donde cada una de ellas está formada por puntos de igual potencial. Esto es

$$S_{V_0} \;=\; \{\vec{r}\;/\;V\left(\vec{r}\right) = V_0\} \tag{4.25}$$

donde S_{V_0} representa la superficie en la que todos los puntos que la componen tienen potencial V_0.

Si una partícula se desplaza sobre una superficie equipotencial, su energía potencial electrostática se mantiene constante. Esto significa que la fuerza eléctrica que actúa sobre ella no hace trabajo. Esto solo puede ocurrir si la fuerza, y por añadidura el campo, resultan perpendiculares a la superficie. La conclusión que se desprende de este razonamiento, es que las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo.

Como ejemplo elemental podemos citar el caso de una carga puntual, donde las líneas de campo son radiales. Entonces las superficies equipotenciales son esféricas.

4.6. Elección de referencias

El potencial electrostático está definido a menos de una constante aditiva. Esto ocurre porque los potenciales que difieren solo en una constante aditiva, tienen las mismas derivadas, y por tanto conducen al mismo campo electrostático. Esta arbitrariedad permite que podamos elegir la posición de referencia $\vec{r}_{ref}$ de la manera más conveniente. Naturalmente, tal conveniencia debe analizarse de acuerdo a la simplicidad matemática de los cálculos que hemos de realizar.

Ahora recordemos algo que suele olvidarse en la práctica cotidiana de la física. Una cosa es el mundo real y otra cosa son los modelos que utilizamos para su representación. Esto parecerá obvio, pero aquí no podemos correr riesgos conceptuales. Vaya entonces una definición: decimos que una distribución de cargas es **finitamente confinada**, si existe una esfera imaginaria de radio finito tal que la distribución sea interior a la misma. Es evidente que *todas* las distribuciones reales de carga caben en esta definición, por lo que la misma parecería superflua. Sin embargo, en el mundo de los modelos pasan cosas raras. Por ejemplo existen planos infinitos uniformemente cargados, hilos rectos infinitamente lar-

gos (también con carga), etc. Y estos sí quedan fuera de la definición. Y como nuestras cuentas viven en el mundo de los modelos, la definición es relevante.

Ahora estamos en condiciones de recomendar una elección apropiada. Si la distribución de cargas es finitamente confinada, es muy práctico elegir la posición de referencia en el infinito. Esto es que

$$\lim_{|\vec{r}|\to\infty} V(\vec{r}) = 0 \tag{4.26}$$

Esta elección puede hacerse porque el potencial en el infinito adquiere el mismo valor por cualquier camino por el que nos alejemos de la distribución de cargas.

Ahora trataremos otras cuestiones que *solo* pueden ocurrir en los modelos. En efecto, algunos modelos incluyen puntos en los que la densidad de carga es infinita. Este es el caso de cargas puntuales, hilos (tratados como soportes unidimensionales de carga), y hojas (modeladas como soportes bidimensionales de carga). En particular, las posiciones en las que hay cargas puntuales o hilos cargados, no admiten ser elegidas como referencia para el potencial. Esto se debe a que el potencial diverge (tiende a infinito) en dichos puntos. Observe el lector que las distribuciones superficiales de carga no tienen este problema, por lo que están habilitadas como posibles referencias.

En resumen, la elección del punto de referencia puede hacerse de la siguiente manera:

- En cualquier punto de posición finita en el vacío.
- En el infinito, si el sistema de cargas es finitamente confinado.
- Sobre la distribución de cargas, excepto cuando sean cargas puntuales o distribuciones de carga unidimensionales.

4.7. Potencial asociado a una partícula puntual cargada

Consideremos una partícula puntual que utilizaremos para modelar un pequeño cuerpo que posee una carga neta Q. Comencemos por elegir el origen de coordenadas sobre la partícula, por lo que su campo electrostático se reduce a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kQ}{r^2}\,\breve{r} \tag{4.27}$$

Nos proponemos determinar el potencial $V(\vec{r})$ en un punto arbitrario $\vec{r}$ del espacio. Entonces tenemos que elegir una referencia apropiada. Como la distribución es finitamente confinada, elegimos la referencia en infinito. Esto es, $|\vec{r}_{ref}| \to \infty$. Ahora observamos que una curva muy apropiada para recorrer desde $\vec{r}_{ref}$ hasta $\vec{r}$ es la semirrecta radial que nace en $\vec{r}$ y se extiende hasta el infinito, tomando valores crecientes de la coordenada radial r (que para no confundirla con el módulo del vector $\vec{r}$ la llameremos r''). Entonces los elementos de la curva pueden parametrizarse como

$$\vec{dl} \;=\; -dr''\breve{r} \tag{4.28}$$

donde el signo menos se debe a que la curva será recorrida en sentido contrario al sentido de crecimiento del parámetro r'' (ver Figura 4.3).

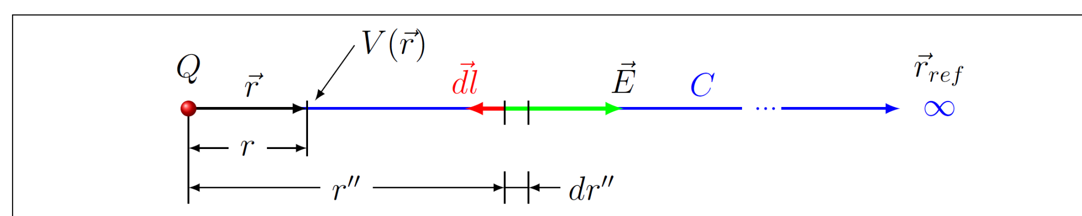


Figura 4.3: Esquema de los elementos geométricos necesarios para desarrollar el potencial de una partícula puntual cargada. La partícula se encuentra en el origen y el parámetro r'' recorre la semirrecta que viene radialmente desde el infinito hasta $\vec{r}$. Es importante remarcar quee la curva C se recorre desde la posición de referencia, $\vec{r}_{ref}$, hasta el punto en donde se calcula el potencial, $\vec{r}$.

Ahora estamos en condiciones de calcular el potencial

$$V(\vec{r}) \;=\; -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} \;=\; -\int_{r}^{\infty} \frac{kQ}{r''^2}\breve{r}\cdot(-dr''\breve{r}) \tag{4.29}$$

En esta última expresión, suele ocurrir cierta confusión debida al aspecto de los límites de integración. Aquí pareciera que hemos invertido los límites. Sin embargo esto no es así. Lo que ocurre es que la primera integral es del tipo curvilínea, mientras que la segunda es ordinaria, y como tal debe ser recorrida en el sentido en que crece el parámetro r''. El recorrido sobre la curva en sentido contrario ha sido tenido en cuenta en la parametrización de $\vec{dl}$.

Resolvamos la integral

$$V(\vec{r}) = kQ \int_r^\infty \frac{dr''}{r''^2} = kQ \left[-\frac{1}{r''} \right]_r^\infty \tag{4.30}$$

con lo que obtenemos

$$V(\vec{r}) = \frac{kQ}{r} \tag{4.31}$$

Recordemos que este resultado fue desarrollado para una partícula puntual cargada situada en el origen, eligiendo la referencia para el potencial en el infinito. Una extensión inmediata para el caso en que la partícula esté situada en la posición genérica $\vec{r'}$ será

$$V(\vec{r}) = \frac{kQ}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \tag{4.32}$$

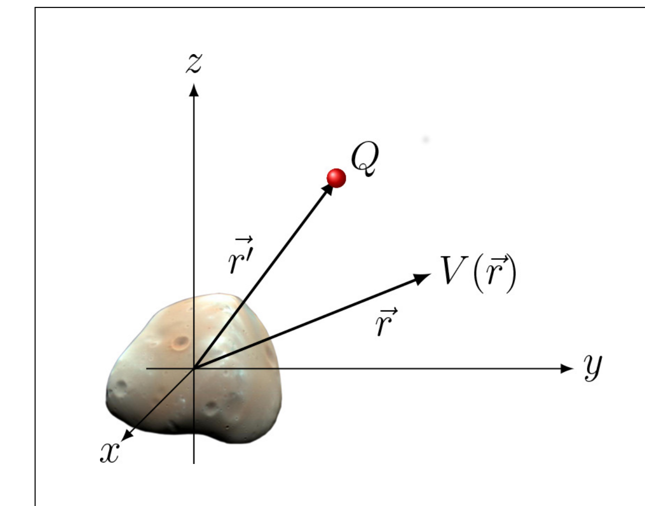


Figura 4.4: Esquema de los vectores involucrados en el potencial producido por una partícula cargada. Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r'}$ representan las posiciones de la partícula y de la posición donde se evalúa el potencial respectivamente.

4.8. Potencial de una distribución de cargas

El paso siguiente consiste en encontrar el potencial producido por una distribución de cargas. Pueden darse dos casos y sus combinaciones. En primer lugar, supongamos que la distribución está formada por una colección finitamente confinada de partículas puntuales cargadas. Sean $Q_1, Q_2, ..., Q_N$ las cargas

residentes en las partículas situadas en las posiciones $\vec{r'}_1, \vec{r'}_2, ..., \vec{r'}_N$ respectivamente (ver Figura 4.5, izquierda). Entonces el potencial se obtiene por simple superposición

$$V(\vec{r}) \;=\; k \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\mid \vec{r} - \vec{r'}_i \mid} \tag{4.33}$$

donde la referencia de potencial ha sido elegida en el infinito (por lo que rige la restricción de confinamiento finito).

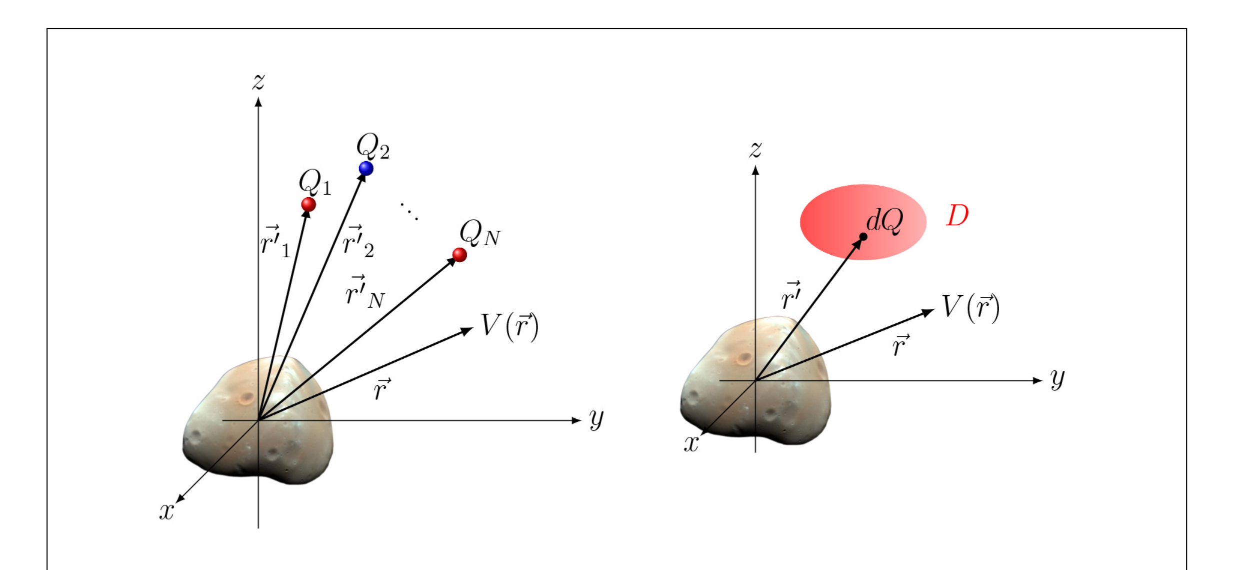


Figura 4.5: Los esquemas representan los escenarios para la determinación de potenciales producidos por distribuciones de cargas. El esquema de la izquierda corresponde al caso discreto, y el de la derecha al caso continuo.

Ahora analizamos el caso en que la distribución es continua. Siempre es posible subdividir el dominio D en que residen las cargas, en elementos de tamaño diferencial que admiten ser tratados como cargas puntuales (ver Figura 4.5, derecha). Sea dQ la carga residente en un elemento del dominio D, cuya posición es $\vec{r'}$. Entonces el potencial en $\vec{r}$ será

$$V(\vec{r}) \;=\; k \int_D \frac{dQ}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \tag{4.34}$$

Nuevamente, la referencia de potencial ha sido elegida en el infinito, por lo que el dominio D debe ser finitamente confinado. Como habíamos visto en el cálculo

del campo electrostático, el dominio D puede ser una curva, una superficie o un volumen. Entonces el diferencial de carga dQ debe ser reemplazado en la integral, con el mismo criterio discutido para el campo.

4.9. Ejemplo: Potencial en el eje de un anillo

Este ejemplo es sumamente esclarecedor, dado que permite ser resuelto, tanto por integración del campo electrostático, como a partir de la distribución de fuentes. Dado que la distribución de cargas es finitamente confinada, es apropiado elegir la referencia de potencial en el infinito (si no fuera así, no sería posible la segunda variante). A continuación analizamos ambas posibilidades.
(a) Como ya hemos deducido, el campo electrostático en el eje de un anillo de radio R, que posee una carga Q uniformemente distribuida, viene dado por

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{kQz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\breve{k} \tag{4.35}$$

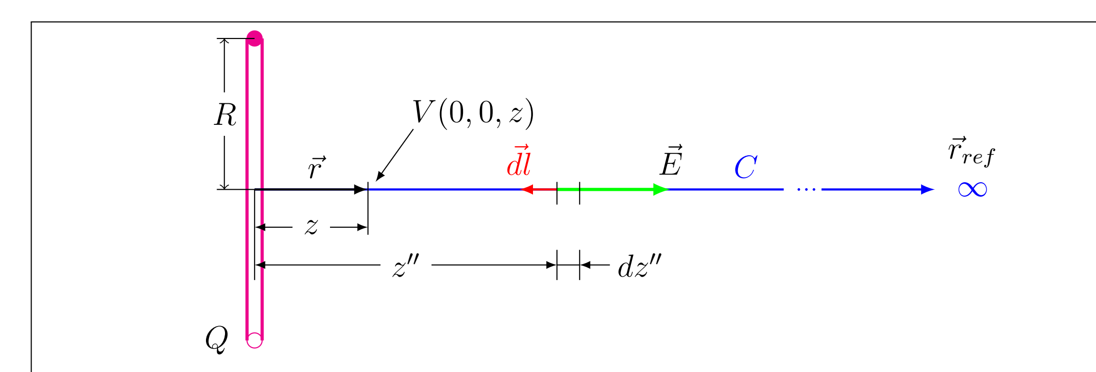


Figura 4.6: El esquema representa un anillo situado en un plano perpendicular al papel. El origen está en el centro del anillo y el eje z va horizontalmente. Observe cuidadosamente las notaciones.

Elegimos como curva de integración la semirrecta que se deasarrolla sobre el eje z, desde $\vec{r} = (0,0,z)$ hasta infinito. Por supuesto, el recorrido se hará en sentido contrario, es decir desde infinito a $\vec{r}$. Para no confundir el parámetro de integración con la posición del punto de llegada, decimos que la coordenada que corre a lo largo de la semirrecta se llama z'' (ver Figura 4.6). Entonces un elemento de dicha recta será

$$\vec{dl} \;=\; -dz''\breve{k} \tag{4.36}$$

donde el signo menos pone de manifiesto que la curva se recorre acercándose al origen. Entonces el potencial será

$$V(0,0,z) \;=\; -\int_{C\;\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} \;=\; -\int_{z}^{\infty} \frac{kQz''}{\left(R^2+z''^2\right)^{3/2}}\,\breve{k}\cdot\left(-dz''\breve{k}\right) \qquad (4.37)$$

Resolviendo el producto escalar tenemos

$$V(0,0,z) \;=\; kQ\int_{z}^{\infty} \frac{z''\,dz''}{\left(R^2+z''^2\right)^{3/2}} \qquad (4.38)$$

La integral se resuelve fácilmente por sustitución haciendo

$$u \;=\; R^2+z''^2 \quad\rightarrow\quad du \;=\; 2z''\,dz'' \qquad (4.39)$$

Entonces

$$V(0,0,z) \;=\; \frac{kQ}{2}\int_{R^2+z^2}^{\infty}\frac{du}{u^{3/2}} \;=\; \frac{kQ}{2}\,\frac{2}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (4.40)$$

O, en forma más compacta

$$V(0,0,z) \;=\; \frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (4.41)$$

(b) Ahora repetimos el cálculo a partir de la distribución de carga. Para ello utilizamos la integral sobre el dominio de la distribución, que para este caso toma la forma

$$V(0,0,z) \;=\; k\int_{D}\frac{dQ}{\mid\vec{r}-\vec{r'}\mid} \;=\; k\int_{D}\frac{dQ}{\left(R^2+z^2\right)^{1/2}} \qquad (4.42)$$

donde puede observarse que el denominador del integrando es simplemente la distancia entre un elemento del anillo y el punto $(0,0,z)$. Como tal distancia es invariante en el proceso de integración, puede ser tratada como una constante. Entonces

$$V(0,0,z) \; = \; \frac{k}{(R^2+z^2)^{1/2}} \int_D dQ \tag{4.43}$$

La integral remanente puede interpretarse como la carga total del anillo, por lo que concluimos que

$$V(0,0,z) \; = \; \frac{kQ}{\sqrt{R^2+z^2}} \tag{4.44}$$

que coincide con el resultado hallado en (a).

El lector podrá apreciar que la segunda resolución es claramente más sencilla que la primera. Esto no siempre es así, por lo que sugerimos que se ejercite mucho sobre este tipo de resoluciones, hasta adquirir experiencia para elegir el camino.

4.10. Energía potencial de un sistema de partículas cargadas

Consideremos un sistema de partículas con cargas $Q_1, Q_2, ..., Q_N$, rígidamente emplazadas en posiciones $\vec{r'}_1, \vec{r'}_2, ..., \vec{r'}_N$. La energía potencial electrostática que posee el sistema, por definición, coincide con el trabajo cuasiestático hecho por agentes externos para “construirlo". En otras palabras, es el trabajo que hubo que hacer para transportar cada partícula desde el infinito hasta su posición $\vec{r'}_i$. Para calcular estos trabajos, pensemos que el proceso es secuencial. Primero supongamos que todas las partículas están en el infinito. Para traer la primera, no hay que enfrentar ningún campo, por lo que el trabajo es nulo. Así situamos la partícula 1 en $\vec{r'}_1$. Ahora hay que trer la partícula 2 hasta $\vec{r'}_2$. Entonces nos enfrentamos al campo producido por la 1. Si logramos instalar la 2 en su posición definitiva, habremos realizado un trabajo igual a la energía potencial adquirida por el sistema de dos partículas. Esto es

$$U_{12} \; = \; \frac{kQ_1Q_2}{\mid \vec{r'}_2 - \vec{r'}_1 \mid} \tag{4.45}$$

Al traer la tercera partícula, el recorrido debe hacerse bajo la influencia de las dos primeras. Y así sucesivamente hasta completar el procedimiento. A continuación mostramos los trabajos involucrados en cada traslado

Partícula 1: 0

Partícula 2: $\dfrac{kQ_1Q_2}{\mid \vec{r'}_2 - \vec{r'}_1 \mid}$

Partícula 3: $\dfrac{kQ_1Q_3}{\mid \vec{r'}_3 - \vec{r'}_1 \mid} + \dfrac{kQ_2Q_3}{\mid \vec{r'}_3 - \vec{r'}_2 \mid}$

Partícula 4: $\dfrac{kQ_1Q_4}{\mid \vec{r'}_4 - \vec{r'}_1 \mid} + \dfrac{kQ_2Q_4}{\mid \vec{r'}_4 - \vec{r'}_2 \mid} + \dfrac{kQ_3Q_4}{\mid \vec{r'}_4 - \vec{r'}_3 \mid}$

...

Partícula N: $\dfrac{kQ_1Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_1 \mid} + \dfrac{kQ_2Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_2 \mid} + \dfrac{kQ_3Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_3 \mid} + ... + \dfrac{kQ_{N-1}Q_N}{\mid \vec{r'}_N - \vec{r'}_{N-1} \mid}$

La energía potencial adquirida por el arreglo final es la suma de todos los trabajos realizados en el proceso constructivo. Observe que la suma de todos los términos de la tabla puede sintetizarse como sigue

$$U = \sum_{j=2}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{kQ_iQ_j}{\mid \vec{r'}_j - \vec{r'}_i \mid} \tag{4.46}$$

Esta expresión puede escribirse en una forma algo más compacta. Reconociendo que los índices i y j pueden tomar todos los valores entre 1 y N, Tenemos que

$$U = \frac{k}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_iQ_j}{\mid \vec{r'}_j - \vec{r'}_i \mid} \tag{4.47}$$

El lector debe observar que los términos con $i = j$ deben excluirse porque no aparecen en la expresión (4.46). Desde el punto de vista físico, esto es muy natural, dado que estos términos representarían el proceso absurdo de traer una carga en contra de su propio campo[2]. Por otra parte, el factor $1/2$ que precede a la sumatoria, se debe a que la expresión (4.47) cuenta dos veces la contribución de cada par de partículas.

[2]Más adelante discutiremos algunos detalles sobre el contenido físico de estos términos en modelos más evolucionados.

4.11. Energía configuracional de distribuciones de carga continuas

Ahora extenderemos el análisis al caso de una distribución de carga continua, donde supondremos que la misma puede describirse mediante una densidad volumétrica $\delta(\vec{r})$. Para fijar ideas, comencemos por imaginar un mallado tridimensional de pequeños cubos que cubre todo el volumen de la distribución. Supongamos que a cada cubo se le asigna la pequeña fracción de carga que aloja. Si ahora llevamos esta imagen al límite diferencial, se hace lícito pensar en la carga residente en cada cubo como si fuera puntual. Siguiendo este razonamiento, consideremos dos elementos de carga dQ y dQ', que habitan los cubos diferenciales situados en las posiciones $\vec{r}$ y $\vec{r'}$. La contribución a la energía configuracional de este par de elementos viene dada por

$$dU \; = \; k \, \frac{dQ \, dQ'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{4.48}$$

El paso siguiente será sumar las contribuciones provenientes de todos los pares de elementos que puedan definirse en el sistema. En el límite en que venimos trabajando, esto significa integrar sobre todos los posibles dQ y todos los posibles dQ'. Así tendremos

$$U \; = \; \frac{k}{2} \int_D \int_{D'} \frac{dQ \, dQ'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \tag{4.49}$$

donde los dominios D y D' son idénticos, y cada uno de ellos recorre todo el reticulado de la distribución. El factor $1/2$ que precede a las integrales, se debe a que al recorrer los dominios completos, la contribución a la energía de cada par de elementos de carga se cuenta dos veces. La última expresión puede reescribirse como sigue

$$U \; = \; \frac{1}{2} \int_D dQ \, \left\{ k \int_{D'} \frac{dQ'}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right\} \tag{4.50}$$

El lector habrá advertido que la parte de la expresión (4.50) indicada entre llaves, es el potencial que toda la distribución genera en la posición $\vec{r}$. Así, la energía configuracional del sistema puede escribirse como

$$U = \frac{1}{2}\int_D V(\vec{r})\,dQ \tag{4.51}$$

Dado que partimos de considerar una distribución de cargas descriptible mediante una densidad volumétrica, los diferenciales de carga pueden reemplazarse en función de la densidad $\delta(\vec{r'})$. Así tendremos

$$U = \frac{1}{2}\int_V V(\vec{r})\,\delta(\vec{r})\,dv \tag{4.52}$$

donde V representa el dominio volumétrico donde se desarrolla la distribución de cargas, y dv es el volumen de cada uno de los cubos diferenciales del mallado. Observe que la expresión (4.52) permite determinar la energía configuracional del arreglo de cargas conociendo los detalles de la distribución y los detalles del potencial que ella misma genera. Sin embargo, su aplicabilidad está limitada en el mundo de los modelos, dado que cuando aparecen cargas puntuales o densidades lineales de carga, el potencial diverge sobre ellas. Por tanto, el lector deberá ser muy cuidadoso con el uso de la expresión (4.52), revisando previamente las características de la distribución de cargas en cuestión. El caso de densidades superficiales puede ser tratado del mismo modo que el caso volumétrico, dado que el potencial se mantiene finito y continuo en los puntos donde la carga se describe mediante una densidad superficial. Si este fuera el caso, la expresión (4.51) podría escribirse como sigue

$$U = \frac{1}{2}\int_S V(\vec{r})\,\sigma(\vec{r})\,ds \tag{4.53}$$

donde S representa el dominio (superficie) sobre el que se desarrolla el arreglo de cargas, $\sigma(\vec{r})$ es la densidad superficial de carga y ds es el tamaño de un elemento diferencial del mallado bidimensional con que se haya subdividido el dominio S.

4.12. Problemas

1. En cierta región del espacio yace un campo electrostático uniforme orientado en el sentido positivo del eje y, dado por

$$\vec{E} = (0\,\text{N/C},\, 3 \times 10^3\,\text{N/C},\, 0\,\text{N/C})$$

Utilice la definición de trabajo

$$W_{\vec{F}C} \;=\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

para calcular el trabajo que debe realizar un agente externo al trasladar cuasiestáticamente una partícula de carga $q = 5\,\mu$C, desde el punto 1 situado en $\vec{r}_1 = (0\,\text{cm},\, 25\,\text{cm},\, 0\,\text{cm})$ hasta el punto 2 situado en $\vec{r}_2 = (25\,\text{cm},\, 0\,\text{cm},\, 0\,\text{cm})$, en los siguientes casos:

   a) Utilizando como camino de integración la recta que une los puntos 1 y 2.

   b) Integrando sobre un camino formado por dos tramos rectos: el primero desde 1 hacia la derecha paralelo al eje x y el segundo paralelo al eje y hasta alcanzar el punto 2.

   c) Recorriendo el cuarto de la circunferencia centrada en el origen que pasa por los puntos 1 y 2.

   d) Compare los resultados anteriores. ¿Qué se puede deducir de esta información?

2. Una partícula cargada con $20\,\mu$C se emplaza rígidamente en un punto, en el que aprovechamos a elegir el origen de coordenadas. Un agente externo desplaza cuasiestáticamente una partícula idéntica a la primera a lo largo de un camino paralelo al eje x entre los puntos 1 y 2, situados respectivamente en $\vec{r}_1 = (12\,\text{cm},\, 12\,\text{cm},\, 0\,\text{cm})$ y $\vec{r}_2 = (42\,\text{cm},\, 12\,\text{cm},\, 0\,\text{cm})$. Calcule el trabajo realizado por el agente externo, utilizando la definición de trabajo. ¿Cuál será la diferencia de potencial $V_2 - V_1$?

3. *a*) A partir de la relación entre la fuerza electrostática y el campo electrostático, determine la relación entre la energía potencial y el potencial asociados.

   b) Si una partícula cargada positivamente es abandonada en reposo en un campo electrostático, la misma se moverá espontáneamente. ¿Viajará hacia regiones de mayor o menor energía potencial? ¿Se moverá hacia zonas de mayor o menor potencial?

   c) Repita el análisis del punto (b) para el caso en que la carga sea negativa.

   d) De los apartados anteriores, ¿Se desprende un comportamiento que pueda considerarse como *Principio de la Naturaleza*? Trate de enunciar formalmente.

4. Considere el procedimiento para obtener el potencial electrostático de una carga puntual. ¿Cuál es el punto de referencia más conveniente? ¿Es el único punto de referencia posible? Grafique la familia de curvas que representan los posibles potenciales electrostáticos asociados a una carga puntual positiva situada en el origen. Indique en cada curva de la familia, la posición del punto de referencia.

5. Tres partículas se encuentran emplazadas en los vértices de un triángulo equilátero. Las mismas tienen cargas idénticas $Q_1 = Q_2 = Q_3$. Dibuje algunas líneas de campo electrostático y algunas curvas equipotenciales (trazas de las superficies equipotenciales sobre el plano que contiene las partículas).

6. Grafique las componentes del campo y el potencial como funciones de la posición para un anillo de R y carga Q uniformemente distribuida en puntos situados sobre su eje de simetría. Observe y verifique analíticamente que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

7. Considere un anillo de radio $R = 5$ cm y carga $Q = 30\,\mu$C uniformemente distribuida, suponiendo que sobre el eje hay un tubo en el que puede deslizar una partícula libre de rozamiento. Suponga que la partícula posee una masa $m = 2,5$ g y una carga de $q = -5\,\mu$C.

   a) Determine la energía potencial de la partícula cuando la misma se emplaza a 7 cm del centro del anillo. ¿Y si se colocara en el centro del anillo?

   b) Si ahora la partícula se libera a 7 cm del centro del anillo, la misma realizará oscilaciones ¿por qué? ¿Serán armónicas? Calcule la rapidez con que pasa por el centro del anillo. Grafique la componente de la velocidad como función de la coordenada que corre a lo largo del tubo.

8. Determine el potencial en todas partes para cada uno de los siguientes casos, especificando claramente dónde elige la referencia.

   a) Una esfera de radio R y carga Q uniformemente distribuida.

   b) Un hilo recto infinitamente largo con densidad lineal de carga uniforme λ.

   c) Un plano infinitamente extendido con densidad superficial de carga uniforme σ.

   d) Dos partículas puntuales de cargas Q y $-Q$, emplazadas firmemente en posiciones que distan una medida l.

   e) Dos hilos rectos paralelos separados una distancia d, con densidades lineales de carga λ_1 y λ_2.

9. Una pequeña esfera de 2 g cuelga de un hilo de masa despreciable entre dos placas paralelas verticales, separadas 5 cm. La carga de la esfera es de 6 nC. Calcule la diferencia de potencial entre las placas si el hilo forma un ángulo de 10° con la vertical.

10. Cierta distribución de carga esféricamente simétrica tiene una densidad dada por

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < R_1 \\ a\,r & \text{si} \quad R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si} \quad R_2 < r \end{cases}$$

    donde a es una constante positiva con unidades adecuadas. Deduzca las expresiones que describen el campo y el potencial electrostáticos como funciones de la coordenada radial r.

11. Una carga eléctrica Q está distribuida de manera uniforme a lo largo de una varilla delgada de longitud $2a$. Encuentre una expresión para el potencial electrostático sobre una perpendicular que pasa por el centro de la varilla, como función de la coordenada y, medida desde dicho centro. Derivando esta expresión, encuentre la componente E_y del campo electrostático sobre la línea mencionada.

12. El potencial electrostático a una cierta distancia de una partícula cargada es de 800 V. Por su parte, el módulo del campo electrostático en el mismo punto es de 200 N/C. Determine la distancia del punto a la partícula y la carga de la misma, sabiendo que el cero de potencial ha sido elegido en el infinito.

Capítulo 5
Electrostática en medios conductores

5.1. El modelo microscópico

Comencemos por imaginar un modelo **microscópico** de conductor sólido. Una versión muy simplificada se compone de las siguientes partes:

- Un arreglo tridimensional compacto de iones positivos, cuyas posiciones relativas se mantienen constantes (red fija). Cada uno de los iones puede pensarse como un átomo del metal, que ha cedido uno o dos electrones al momento de tomar parte del cuerpo al que pertenece.
- Un gas ideal de electrones de conducción, que deambulan libremente como si estuvieran en una cavidad cuyas paredes son las fronteras del cuerpo. Estos electrones son cedidos por los átomos al convertirse en iones positivos para formar el cuerpo.

Con este modelo cabe imaginar que la carga positiva permanece fija dentro del conductor y distribuida uniformemente en su volumen. Por su parte, los electrones de conducción son móviles y se distribuyen en forma estadísticamente uniforme en todo el volumen del conductor. Podemos entender entonces, que el conductor resulte a priori local y globalmente neutro.

Ahora nos preguntamos ¿cuánta carga positiva y negativa habrá dentro de un conductor? Para fijar ideas, imaginemos una muestra cúbica de metal de $1\,$cm de lado. Una distancia típica de separación entre núcleos atómicos en un sólido es del orden de 1 Å$= 10^{-8}\,$cm. Entonces en la muestra caben 10^{24} iones. Si por cada ión existe 1 electrón de conducción, la muestra tendrá un gas ideal formado por 10^{24} electrones uniformemente distribuidos en $1\,$cm^3. Por tanto, la densidad será típicamente del orden de 10^{24} partículas por centímetro cúbico. Recordando

que la carga elemental es $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, tenemos que la densidad de carga positiva fija en la red de iones será

$$\rho_+ \,=\, 1,6 \times 10^5 \text{ C/cm}^3 \tag{5.1}$$

Por su parte, los electrones de conducción se distribuyen estadísticamente con una densidad promedio

$$\rho_- \,=\, -1,6 \times 10^5 \text{ C/cm}^3 \tag{5.2}$$

Por ser el conductor eléctricamente neutro, tanto en general como localmente, el mismo no genera a prioi campos electrostáticos macroscópicos.

Este modelo, a pesar de ser muy simplificado, posee los elementos modernos escenciales. Esto es, da cuenta de los portadores de carga tal como se los concibe actualmente, incluyendo sus condiciones de movilidad. Sin embargo, cuando se formuló la teoría electromagnética hoy vigente (mediados del siglo XIX), los científicos estaban aún muy lejos de la formulación de un modelo microscópico detallado. Evidentemente la carencia de dicho modelo no fue escollo para alcanzar una formulación correcta. Por esto es que conviene repasar brevemente las ideas del llamado *modelo clásico*.

5.2. El modelo clásico

La concepción clásica acerca de la carga consiste en suponer que sus dos formas posibles (positiva y negativa) pueden interpretarse como dos fluidos análogos. Esto es, que ambos tienen idéntica movilidad y que ambos residen en idénticas proporciones dentro de los conductores. Así es que los cientiíficos antiguos pensaban en la posibilidad de migración tanto de cargas positivas como negativas.

¿Por qué este modelo no falla? Simplemente porque la formulación del electromagnetismo no puede distinguir a priori si un cuerpo cargado positivamente, lo está por exceso de carga positiva o por defecto de carga negativa. En tal sentido, el modelo clásico no es erróneo al nivel en que la teoría lo requiere[1].

[1] Una paradoja que puso de manifiesto las limitaciones del modelo clásico surgió con el efecto Hall, al que nos referiremos más adelante.

5.3. Conductores con carga no compensada

Cuando nos referimos a un conductor cargado, entendemos que sobre él pueden reconocerse sectores en los que existe carga no localmente compensada. Esto puede darse mediante dos mecanismos:

1. Cuando el conductor tiene un exceso real de cargas de un tipo, ya sea por exceso de electrones de conducción (carga negativa), o por defecto de los mismos (carga positiva). Para que tal mecanismo pueda darse, es indispensable el tránsito de cargas desde o hacia otros cuerpos, por lo que decimos que el proceso de carga es **por contacto**.

2. Cuando el conductor es sometido a un campo externo, su carga interna se redistribuye originando sectores con densidades de carga no nulas. Cuando un cuerpo adquiere carga local mediante este mecanismo, decimos que ha sido cargado **por inducción**.

En lo que sigue de esta sección, nos referiremos al caso en que el conductor ha adquirido un exceso de carga (caso 1). Pospondremos el tratamiento del caso inductivo para secciones posteriores.

Para comprender los procesos internos en el conductor, cuando el mismo adquiere un exceso de carga, utilizaremos una idea basada en el modelo clásico (aunque con algo de caricatura). Imaginemos una pizzera sobre una mesa desprovista de toda propiedad eléctrica. Supongamos ahora que tres pelotitas de ping-pong igualmente cargadas, se liberan en el centro de la pizzera (Figura 5.1 a)). Sus repulsiones mutuas las llevarán a topar con el borde y quedar estáticas en posiciones que forman los vértices de un triángulo equilátero. En tales condiciones, cada pelotita estará afectada por las fuerzas de interacción con las otras dos, y la fuerza de vínculo[2] debida al borde de la pizzera. Observe que cada una de las pelotitas se encuentra en equilibrio estable (Figura 5.1 b)). Si el experimento se repitiera con N pelotitas, es fácil imaginar que las mismas se acomodarían sobre el borde de la pizzera formando los vértices de un polígono regular de N lados.

Homologando esta idea intuitiva con el funcionamiento de un medio conductor, podemos extraer algunas conclusiones importantes. En primer lugar, si pensamos que dentro de un sólido conductor existe un exceso de carga, sus interacciones múltiples combinadas con su movilidad las llevarán hasta la superficie.

[2]Llamamos **fuerza de vínculo** a la que opera cuando una partícula intenta trasponer un condicionante físico. Por ejemplo, la componente normal de la fuerza de contacto que una calle ejerce sobre una persona parada en ella, es una fuerza que puede pensarse como impidiendo que la persona penetre la calle.

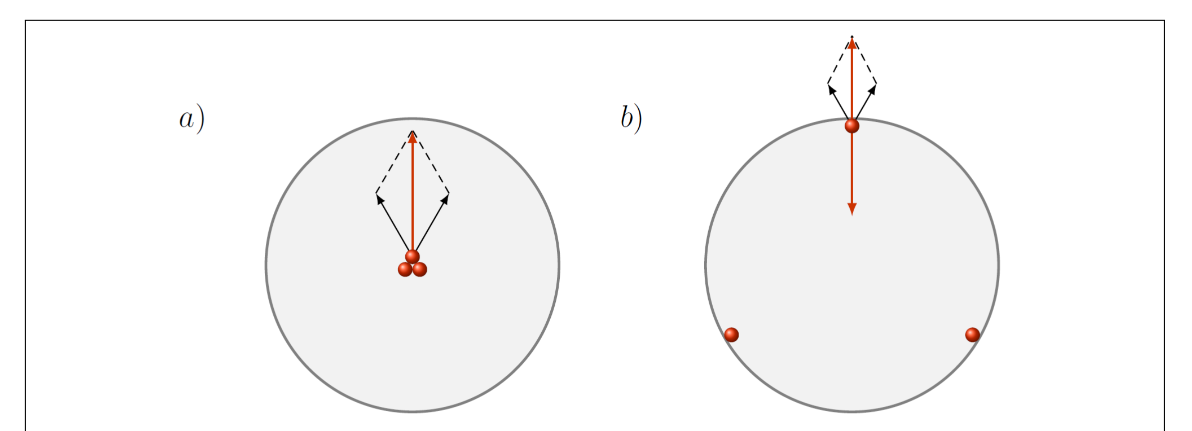


Figura 5.1: Modelo de pizzeras: $a)$ Estado inicial: tres pelotitas de ping-pong igualmente cargadas se sueltan en el centro de una pizzera; se grafican las fuerzas que dos de ellas ejercen sobre la tercera. $b)$ Estado final: como resultado de sus repulsiones, las pelotitas se desplazan hacia el borde de la pizzera y se disponen formando un triángulo equilátero. Se grafican las fuerzas que en este estado de equilibrio se ejercen sobre una de las pelotitas.

Durante el "proceso transitorio" en que las cargas están reorganizándose, no habrá equilibrio, por lo que diremos que la situación no es electrostática. Finalmente se alcanzará el equilibrio estable cuando la carga se sitúe sobre la superficie. Nótese que esta conclusión es independiente de la forma del cuerpo.

Por otra parte, la simetría del modelo planteado conduce a una distribución de carga uniforme. De esto puede concluirse que un exceso de carga en una esfera conductora se distribuirá sobre su superficie con una densidad uniforme. Téngase en cuenta que este efecto requiere de la simetría del cuerpo, por lo que no debe considerarse un resultado general.

5.4. Campo y potencial electrostáticos en el interior de un conductor

Ya hemos visualizado que los excesos de carga, en condiciones electrostáticas, se sitúan en la superficie del conductor. Ahora podemos preguntarnos ¿cómo será el campo electrostático generado por la distribución de carga superficial? Para responder esta pregunta, comencemos por recordar que, tanto en el modelo microscópico como en el clásico, el conductor está dotado de cargas libres de moverse por su volumen. Entonces si hubiera campo electrostático dentro del conductor, habría migración de cargas libres. Tal movimiento estaría animado por las fuerzas electrostáticas que el campo ejercería sobre dichas cargas. En con-

clusión, estaríamos en una situación no electrostática, en clara contradicción con la hipótesis de partida. Por lo tanto, estamos en condiciones de asegurar que el campo electrostático en el interior de un conductor, en condiciones electrostáticas, es nulo.

Por otra parte, dado que el campo electrostático puede derivarse siempre de un potencial, concluimos que el potencial electrostático dentro de un conductor (en las condiciones antes mencionadas) debe ser constante. Obsérvese en particular, que la superficie del conductor debe ser una superficie equipotencial. De esto último se deduce que el campo electrostático que se desarrolla hacia afuera del conductor debe ser localmente perpendicular a la superficie.

5.5. El fenómeno de inducción electrostática

Se denomina **inducción** a la reorganización de cargas que tiene lugar en un conductor, cuando el mismo se encuentra bajo los efectos de un campo electrostático de origen externo. Para fijar ideas, consideremos el ejemplo en que una esfera conductora neutra y aislada, se encuentra frente a una partícula que posee carga positiva. Aunque dentro de la esfera ocurrirá un único proceso relativamente complicado, nosotros podemos enumerar una serie de procesos simples que ayudarán a la comprensión del fenómeno en conjunto.

(a) Para iniciar el análisis consideremos que el campo electrostático producido por la carga puntual se desarrolla en todo el espacio, incluyendo el interior del conductor. En la Figura 5.2 mostramos algunas de las íneas de campo nacidas en la carga puntual que atraviesan la esfera conductora, cuyo color gris indica que la misma es originalmente neutra. Esto significa que en su volumen hay una distribución uniforme fija de carga positiva (iones del sólido), y un gas de cargas negativas móviles (electrones de conducción), tales que se compensan mutuamente.

(b) Para discriminar entre cargas positivas y negativas utilizaremos colores rojo y azul respectivamente. El campo electrostático se manifiesta sobre las cargas del sistema dando lugar a fuerzas electrostáticas. Dichas fuerzas no pueden mover a las cargas positivas simplemente porque se lo impide el soporte mecánico que sostiene a la esfera. Por el contrario, las cargas negativas afectadas por el campo se mueven con fuerzas en sentido opuesto al mismo. Esto genera una acumulación de cargas negativas en la superficie de la esfera, predominantemente frente a la carga puntal positiva generadora del campo. En la Figura 5.3 representamos algunas partículas negativas en movimiento como puntos azules sobre los cuales se indican los vectores de fuerza eléctrica. Mientras tanto la frontera de la esfera se ilustra con un color azul no uniforme indicando la tendencia en la localización de las cargas negativas. Por otra parte, el interior de

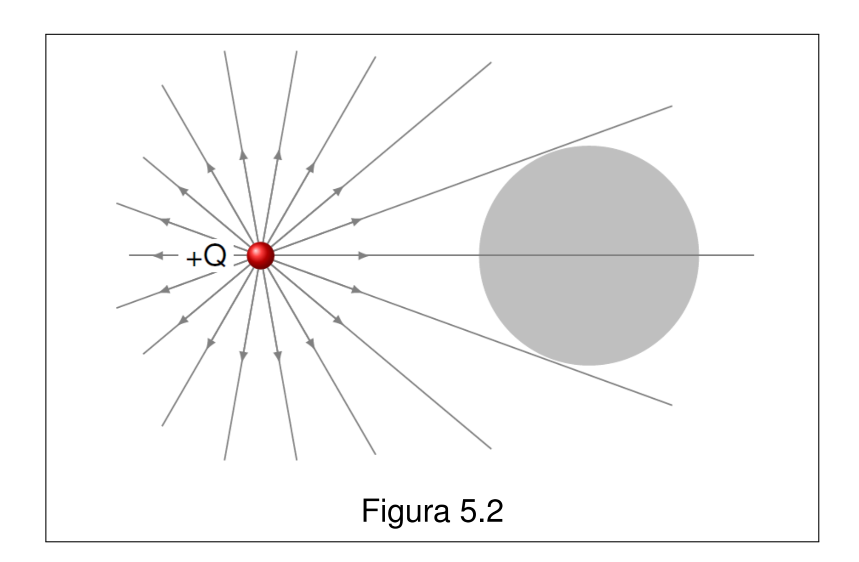


Figura 5.2

la esfera tomó una tonalidad rosada debido a que ante la migración de cargas negativas, aparece una descompensación en la neutralidad volumétrica.

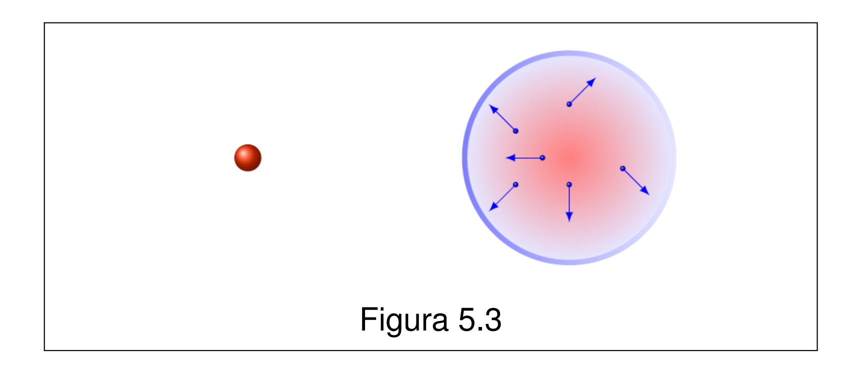


Figura 5.3

(c) A medida que la carga negativa se acumula en la superficie, la misma se manifiesta como una nueva fuente de campo que se propaga tanto dentro como fuera de la esfera.

En particular, en la región interior los campos debidos a la carga positiva externa y a la carga negativa redistribuída en la superficie, tienden a neutralizarse. Este primer proceso finaliza cuando la carga situada en la superficie genera un campo tal que en todos los puntos interiores a la esfera resulta de igual módulo y dirección que el campo externo, pero de sentido contrario. Así el campo resultante es nulo y la carga negativa móvil que aún transita por el interior de la esfera está libre de fuerzas debidas a las fuentes tratadas. En la Figura 5.4 mostramos la esfera con la organización de cargas adquiridas hasta el momento. En la frontera se indica con una línea azul no uniforme la distribución superficial de

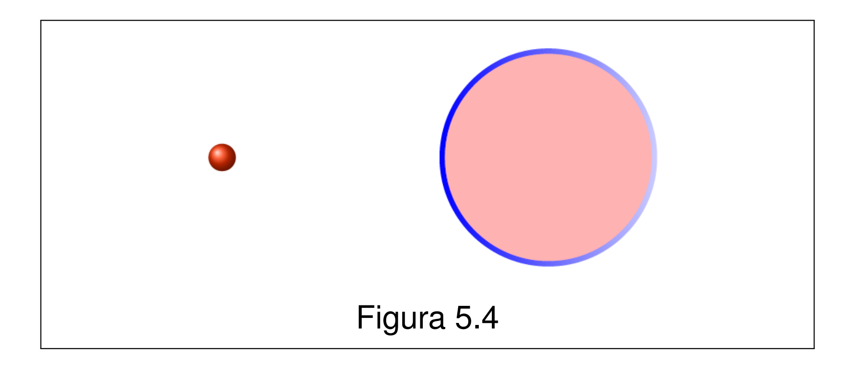


Figura 5.4

carga negativa (claramente asimétrica). En el interior, el rosado uniforme indica una densidad volumétrica de carga positiva. Esto ocurre porque la cantidad de carga negativa distribuída en el volumen no llega a compensar la carga positiva distribuída en la misma región.

(d) Para analizar los procesos que siguen es conveniente imaginar al sistema en forma desdoblada. En las Figuras 5.5 $i)$ y $ii)$ mostramos dos distribuciones de carga que superpuestas nos devuelven la distribución representada en la Figura 5.4. La primera está formada por la carga puntal externa y la distribución asimétrica superficial de carga negativa, tal que en el volumen esférico el campo electrostático que ellas generan es nulo. En la segunda figura solo tenemos una distribución volumétrica uniforme de carga positiva.

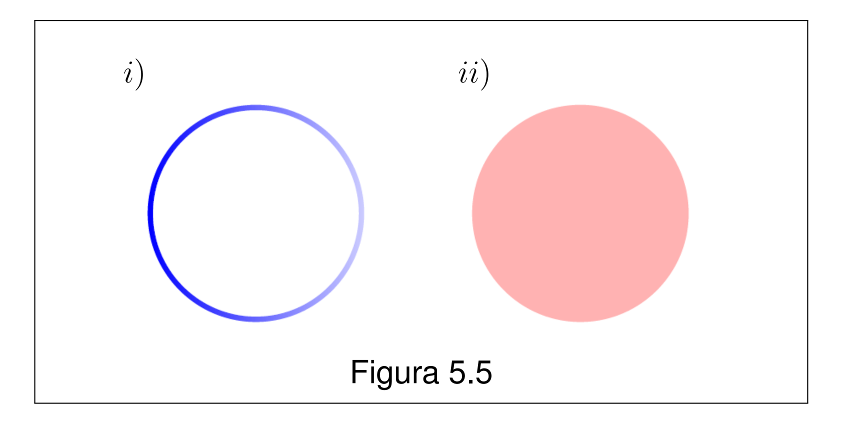
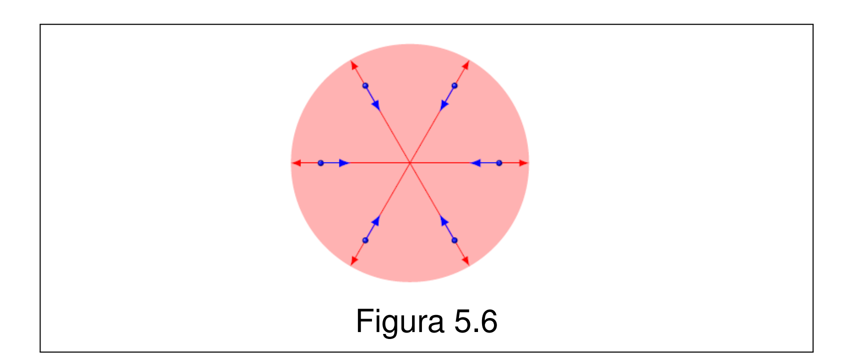


Figura 5.5

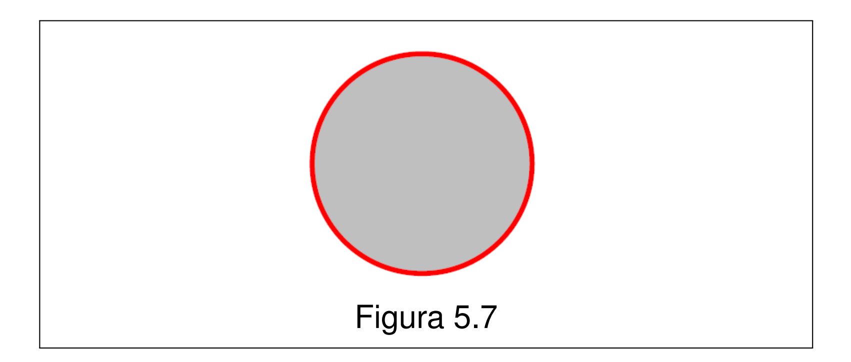
(e) Las cargas indicadas en la Figura 5.5 $i)$ alcanzaron una configuración estable. En cambio, las cargas representadas en la Figura 5.5 $ii)$ todavía pueden admitir alguna movilidad. En efecto, esta última distribución es una esfera uniformemente cargada que genera un campo radial saliente tanto dentro como fuera de su volumen. En la Figura 5.6 mostramos algunas líneas de campo de este sistema (líneas rojas con la indicación del sentido).

Como en este volumen existe una distribución de carga negativa móvil, sus


Figura 5.6

portadores se verán afectados por una fuerza radial que los impulsará hacia el centro de la esfera. También se indican en la Figura 5.6 algunos portadores negativos (puntos azules), con las fuerzas que los afectan. Recuerde el lector que la cantidad total de carga negativa es inferior a la cantidad total de carga positiva, dado que parte de la carga negativa migró a la superficie.

(f) Ahora la carga negativa comenzará a viajar hacia el centro de la esfera afectada por las fuerzas eléctricas radiales. Este proceso puede interpretarse como una compresión simétrica del gas de electrones que da lugar a un rápido aumento de la densidad volumétrica de carga negativa. A la vez un delgado cascarón superficial de carga positiva queda descubierto y constituye una distribución superficial simétrica de carga positiva. El proceso termina cuando las densidades volumétricas de cargas positivas y negativas alcanzan el mismo valor absoluto. En tales condiciones, el volumen interior reestablece su neutralidad, mientras que sobrevive una densidad superficial positiva simétrica sobre toda la frontera del sistema. En la Figura 5.7 mostramos el estado final de la distribución a la que llega la carga de la Figura 5.5 $ii)$.


Figura 5.7

(g) Ahora estamos en condiciones de recomponer el sistema al final de todos los procesos. La distribución resultante surge de superponer las cargas de las Figuras 5.5 $i)$ y 5.7. En la Figura 5.8 observamos el resultado. El volumen interior

se encuentra finalmente neutro. La carga macroscópicamente observable está distribuida sobre la superficie. Aquí se superponen una densidad de carga negativa asimétrica y una densidad de carga positiva simétrica. Esta superposición conduce a una predominancia de carga negativa frente a la carga puntual que generó el campo original. Recíprocamente aparece una predominancia de carga positiva en el hemisferio más alejado de la carga puntal.

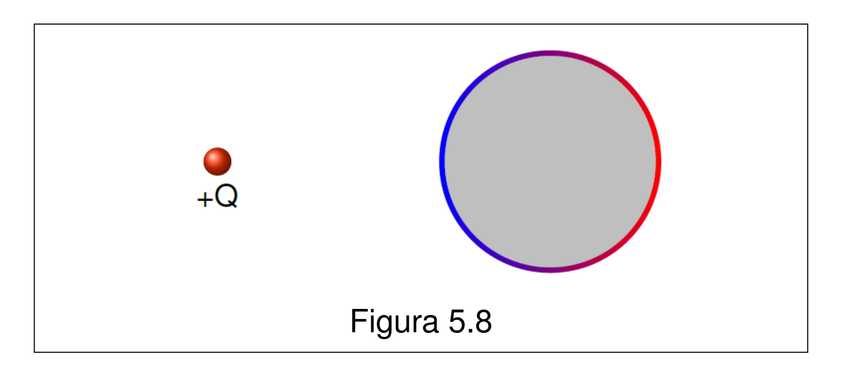


Figura 5.8

A la distribución de cargas así concebida se la denomina **carga inducida por el campo externo**.

5.6. Una vuelta de tuerca sobre los mismos conceptos

La secuencia detallada en la sección anterior, permite discriminar acerca de la “funcionalidad" de las dos distribuciones de carga que conviven en la superficie del conductor. La primera, negativa y asimétrica, es la encargada de garantizar la nulidad del campo electrostático interior *ante el intento invasivo del campo externo*. Con esta mirada, podríamos decir que estas cargas inducidas son *centinelas* del conductor. Ellas están obligadas a permanecer en sus emplazamientos mientras el campo externo siga presente.

Por su parte, la carga remanente permanece ajena a la disputa. Ella se comporta como cualquier excedente de carga. Se sitúa en la superficie a expensas de sus interacciones múltiples, de modo de no afectar con su propio campo al volumen interior del conductor. Esta parte de la carga superficial es “transferible" por contacto a otros cuerpos. Asimismo, carga proveniente de otros cuerpos puede ser recibida y se reorganizará sin perjuicio de las cargas centinelas. A todas estas cargas que se ponen en juego por contacto, las llamaremos *cargas circulantes*, para diferenciarlas de las cargas centinelas que están obligadas a permanecer fijas.

Aún cuando todo el razonamiento anterior haya sido comprendido y aceptado, sobrevive una pregunta algo molesta: ¿qué hubiera ocurrido si la partícula generadora del campo externo hubiese tenido carga negativa? Nuestro modelo microscópico nos dice que el razonamiento no puede ser análogo. En efecto, la diferencia de movilidad entre cargas positivas y negativas hace que el modelo no sea *simétrico* en su respuesta. Sin embargo, el modelo clásico admite tal simetrización. ¿Cómo salimos de este enredo? Una idea muy viable consiste en suponer que el déficit de electrones de conducción en cualquier porción del conductor, pueda interpretarse como carga positiva. Y más aún, si las densidades de carga positiva fluctúan con el tiempo (procesos transitorios), podemos atribuir tales fluctuaciones al *flujo* de carga positiva entre diferentes partes del conductor. Así los dos modelos convergen, y podemos decir que las conclusiones alcanzadas para el caso de la partícula positiva son cualitativamente idénticas al caso de carga negativa. Solo se requiere permutar los signos de las cargas[3].

5.7. Generalizaciones y resumen de propiedades

Hasta este punto hemos presentado algunos modelos que facilitan la comprensión de los procesos internos en un conductor. Aunque los mismos fueron utilizados para analizar situaciones particulares, algunas conclusiones resultan de carácter general. En tal sentido, transcribimos aquí estas propiedades generales, apelando a la reflexión del lector en lo que concierne al alcance de las generalizaciones. Las propiedades que siguen valen para todos los conductores en condicones electrostáticas.

I. La carga macroscópicamente observable se aloja en la superficie del cuerpo.

II. El campo electrostático en el interior del cuerpo es nulo.

III. El potencial electrostático en el interior del cuerpo es constante, por lo que su superficie es equipotencial.

5.8. Conexión a tierra

Consideremos dos esferas conductoras idénticas y supongamos que una de ellas se encuentra inicialmente cargada mientras que la otra permanece neutra. Nos proponemos un análisis intuitivo acerca del estado final que alcanzarán las

[3]El lector habrá advertido que la simetría entre los resultados no implica la simetría de los procesos. En efecto, un buen ejercicio podría ser que el estudiante imagine el proceso para el caso de carga negativa, según las pautas del modelo microscópico.

esferas si se las pone en contacto. Para ello retomamos nuestro modelo caricatura, ahora considerando dos pizzeras iguales. Para representar el contacto imaginamos que las pizzeras se tocan, y en el punto de contacto se hace un corte en las paredes, que permite el paso de pelotitas de ping pong de una pizzera a la otra. Supongamos que inicialmente en una de las pizzeras había 21 pelotitas. Las mismas estarían uniformemente distribuidas sobre el borde y en equilibrio mecánico estable. Tal equilibrio se logra cuando la pared de la pizzera aporta una fuerza sobre cada pelotita, de igual módulo y sentido contrario a la que ejercen sobre ella las 20 restantes.

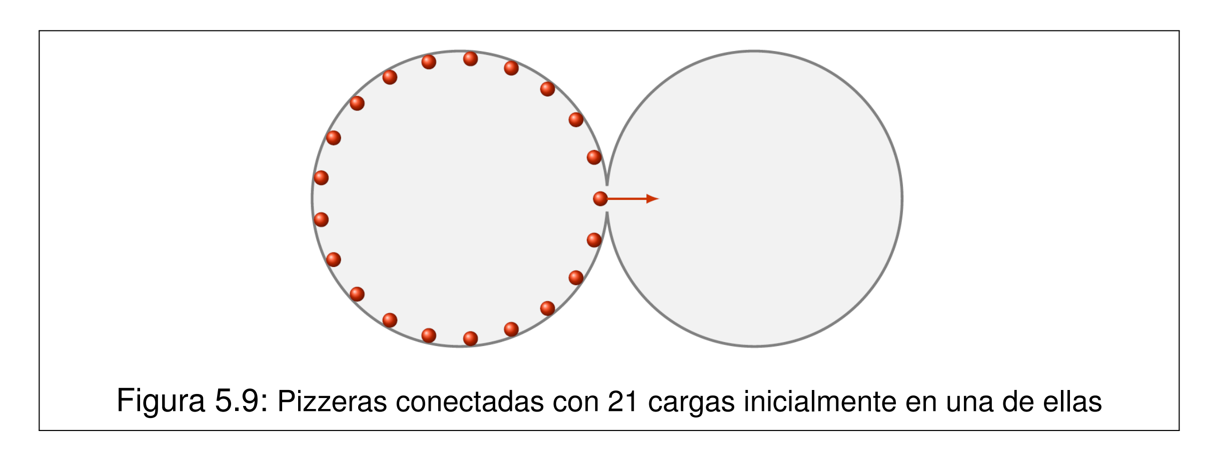


Figura 5.9: Pizzeras conectadas con 21 cargas inicialmente en una de ellas

Ahora bien, supongamos que una pelotita está justo en la puerta que conecta las dos pizzeras. Allí la pared no aporta su fuerza equilibrante, por lo que la pelotita es expulsada hacia la otra pizzera. Las 20 restantes se reordenan, y supongamos que una de ellas queda nuevamente en el punto de contacto. El proceso se repite... Pero, ¿hasta cuándo seguirá este proceso? Supongamos que 10 pelotitas han pasado y la onceava está en puerta. Sobre ella ejercerán fuerzas las 10 que aún permanecen en la primera pizzera, pero también se harán notar las 10 que ya pasaron.

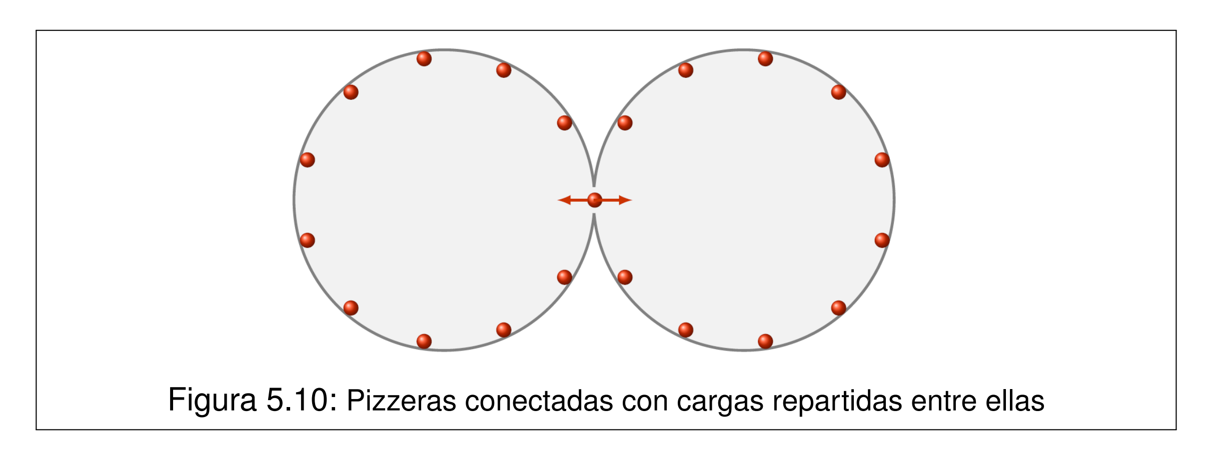


Figura 5.10: Pizzeras conectadas con cargas repartidas entre ellas

La simetría del sistema garantiza que la suma de las fuerzas sobre la onceava pelotita es nula. Entonces el proceso se interrumpe, y más allá del hecho anecdótico de quién se quedará con la onceava pelotita, podemos decir que ambas pizzeras se habrán repartido las pelotitas en partes iguales. Este análisis caricaturezco puede considerarse análogo al reparto de cargas entre dos esferas conductoras idénticas, que puestas en contacto adquirirán idénticas cantidades de carga.

Pero, ¿si las esferas no fueran iguales? Reflexionemos sobre esto. Consideremos la misma situación anterior, aunque ahora la pizzera inicialmente vacía tiene un radio mayor que la cargada. El proceso es escencialmente el mismo hasta que la onceava pelotita llega a la puerta.

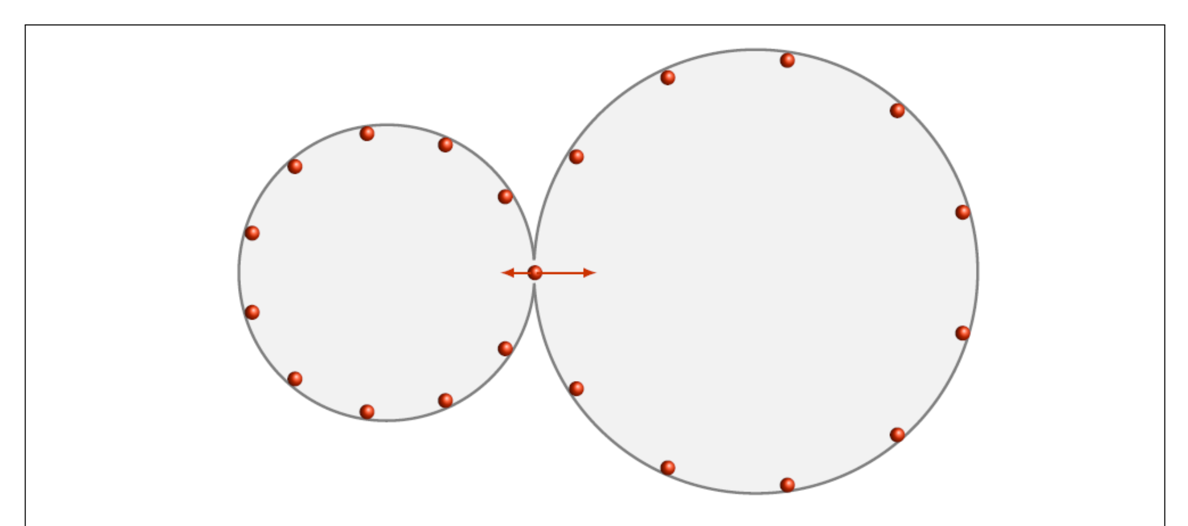


Figura 5.11: Pizzeras conectadas de distintos tamaños con igual carga en cada una de ellas. La fuerza repulsiva sobre la onceava pelotita situada en la puerta que comunica las pizzeras debido a las pelotitas situadas en la pizzera menor es mayor que la debida a las pelotitas situadas en la pizzera mayor (estas últimas se encuentran más lejos que las primeras).

Ahora las interacciones no son simétricas, dado que las distancias son mayores en la pizzera grande. Por tanto la fuerza resultante sigue apuntando en el sentido que favorece la transferencia. Por supuesto, el proceso continuará hasta que las cantidades de carga de uno y otro lado equilibren la fuerza sobre la partícula en puerta. Así tendremos que el número de pelotitas finales será mayor en la pizzera más grande.

Por extensión inmediata, diremos que si una esfera cargada se conecta con otra descargada de mayor radio, al final la carga se habrá repartido de modo que la mayor de las esferas tenga más carga que la otra. Si existe un sistema que ha sido objeto de los más diversos modelados, ese sistema es nuestro nun-

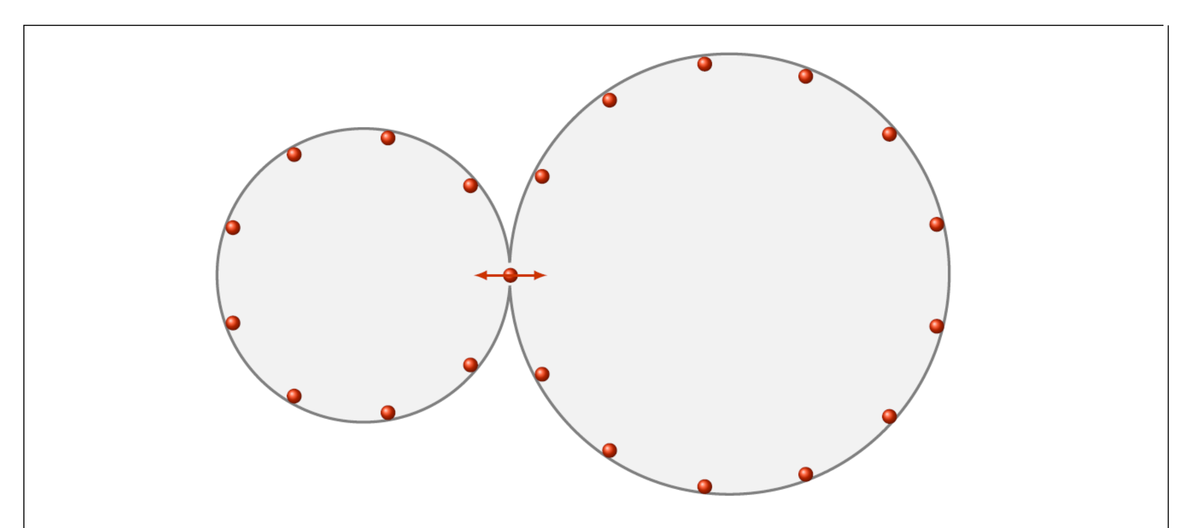


Figura 5.12: Pizzeras de distintos tamaños conectadas, con las cargas equilibradas. La pizzera de mayor radio se queda con más pelotitas cargadas que la pizzera de menor radio.

ca bien ponderado planeta. Desde el humillante modelo de partícula, hasta los complejos (pero no menos reduccionistas) modelos macroeconómicos, la Tierra sigue adaptándose a las miradas científicas. Nosotros, para no ser menos, modelaremos la Tierra como una gran esfera conductora neutra. Y lo interesante es que la Tierra, conciente de nuestra necesidad académica, nos complace respondiendo razonablemente bien a tan extraño requerimiento[4]. Una vez admitido esto, es fácil imaginar lo que sucede si una esfera cargada, cuyo radio es del orden de nuestra escala cotidiana, se conecta a Tierra. Simplemente, se descarga. En sentido esctricto, nuestro razonamiento anterior conduce a que la carga se repartirá entre la Tierra y la esfera en partes de algún modo relacionadas con sus respectivos tamaños. De esto se desprende que, al resultar la esfera muy pequeña comparada con la Tierra, la carga que puede retener en el proceso es despreciablemente pequeña. Naturalmente, este razonamiento puede extenderse a cualquier cuerpo conductor de dimensiones del orden de nuestras escalas cotidianas. El proceso se denomina conexión a Tierra, y en todos los casos tiene como consecuencia la descarga del cuerpo, cualquiera que hubiera sido el signo de su carga.

[4]Valga esta pequeña humorada, para que el estudiante nunca olvide que todo cuanto especulamos se encuentra en el universo de los modelos. Será pues la Naturaleza la que siempre tendrá la última palabra acerca de nuestras especulaciones.

5.9. El electroscopio

El electroscopio es un instrumento diseñado para detectar carga eléctica no compensada, residente en cuerpos macroscópicos. El mismo está formado por una pequeña esfera, una varilla de transmisión y dos hojuelas articuladas. Todas estas partes son conductoras y están conectadas entre sí (ver Figura 5.13).

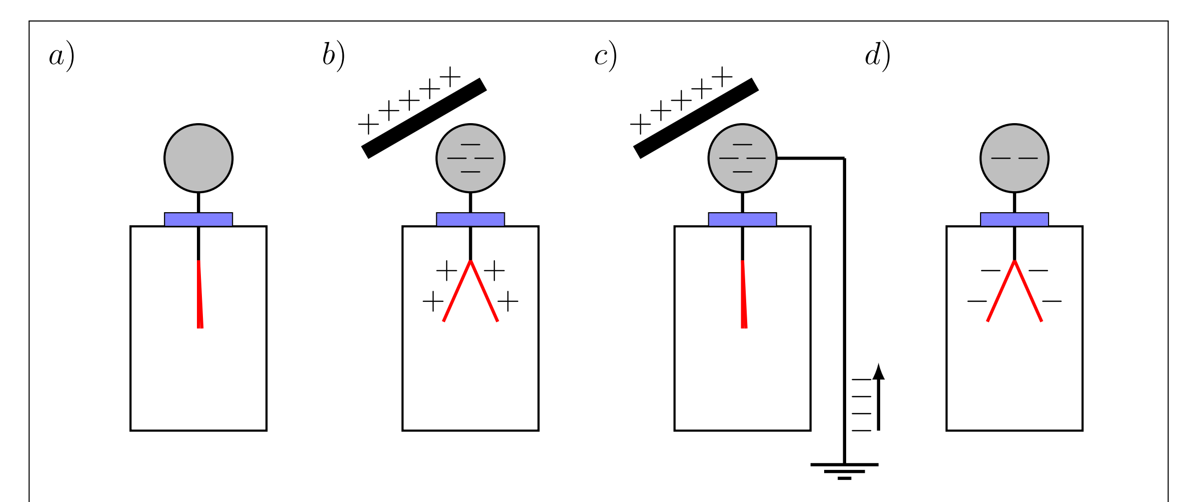


Figura 5.13: Proceso de carga de un electroscopio por inducción: a) electroscopio descargado; b) electroscopio bajo la influencia de un campo externo, sobre el que se indican las cargas centinela y las cargas remanentes; c) electroscopio conectado a tierra en el que permanecen solo las cargas centinela; d) electroscopio liberado del campo externo en que las cargas centinela pasan a ser un excedente que se redistribuye en el instrumento.

Con excepción de la esfera, el resto de las partes se encuentra dentro de una cápsula de vidrio para evitar interacciones atmosféricas no deseadas.

Veamos cómo funciona el electroscopio. Comencemos por lo más simple que consiste en poner en contacto la esfera del instrumento con el cuerpo a medir. Si dicho cuerpo está cargado, transferirá una parte de su carga al electroscopio. Esta carga se distribuirá por la superficie de todo el cuerpo conductor que forma el instrumento, incluyendo las hojuelas metálicas articuladas. Estas últimas, al adquirir cargas del mismo signo se repelen entre sí, separándose apreciablemente. Tal separación de las hojuelas se utiliza como recurso de visualización de la carga residente en el instrumento.

Veamos ahora una situación algo más compleja. Un procedimiento habitual con el electroscopio consiste en cargarlo a partir de la inducción. Veamos cuáles son los pasos:

- En primer lugar, la esfera del electroscopio se pone bajo la influencia de un campo electrostático generado por cualquier objeto cargado (sin que se

produzca el contacto). Entonces, sobre el instrumento aparecerán cargas centinela y el correspondiente remanente de cargas circulantes. Las primeras se sitúan en la esfera, mientras que las otras se distribuyen por toda la superficie metálica, dando lugar a la separación de las ojuelas. Observemos los signos. Las cargas centinelas son de signo opuesto al de la fuente del campo. Por su parte, las cargas circulantes tienen el mismo signo que dicha fuente (ver Figura 5.13 $a)$ y $b)$).

- En segundo lugar se establece la conexión a tierra del electroscopio. Esto puede hacerse simplemente tocando la esfera con la mano. En este proceso, las cargas circulantes abandonan el electroscopio y las hojuelas se juntan. Mientras tanto, las cargas centinela permanecen en sus lugares (ver Figura 5.13 $c)$).

- Finalmente, se retira la fuente del campo. Las cargas centinela quedan liberadas y constituyen un exceso neto de carga en el conductor. Entonces se distribuyen por toda su superficie, haciendo que las hojuelas se separen nuevamente. Nótese que el instrumento ha adquirido carga neta, y la misma es de signo contrario al de la fuente inductora (ver Figura 5.13 $d)$).

5.10. Una mirada más formal sobre las esferas cargadas

Hasta este punto, hemos visto intuitivamente que un exceso de carga residente en una esfera conductora, se distribuye uniformemente en su superficie. Dada la simetría de la distribución, es fácil reconocer, con ayuda de la ley de Gauss, que el campo electrostático exterior a la esfera, coincide con el de una partícula puntual que concentre la misma carga que la esfera y se sitúe en la misma posición de su centro. Se sigue de esto que el potencial asociado también corresponde al de una carga puntual. Entonces, si la esfera tiene radio R y carga Q, tenemos

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^2}\,\breve{r} \qquad V(r) = \frac{kQ}{r} \qquad R < r \tag{5.3}$$

donde el cero de potencial se ha elegido en el infinito.

En particular, el campo electrostático justo afuera de la superficie, y el potencial sobre ella (y en todo su interior) serán

$$\vec{E}(r \to R^+) = \frac{kQ}{R^2}\,\breve{r} \qquad V(r = R) = \frac{kQ}{R} \tag{5.4}$$

La correspondiente densidad superficial de carga será

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{5.5}$$

Resulta interesante relacionar el campo electrostático justo afuera de la superficie de la esfera, con la densidad de carga residente en dicha superficie. Para ello combinamos las expresiones (5.4) y (5.5), con lo que obtenemos

$$\vec{E}(r \to R^+) = 4\pi k\sigma\breve{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\breve{r} \tag{5.6}$$

Esta relación indica que el campo electrostático es proporcional a la densidad superficial de carga.

Analicemos ahora la conexión entre dos esferas cargadas. Supongamos que sus radios son R_1 y R_2 y sus cargas iniciales respectivas Q_1 y Q_2. Para que puedan despreciarse sus influencias mutuas, supongamos que las esferas están situadas en posiciones muy distantes. Entonces estamos en condiciones de hacer la conexión mediante un cable largo. Cuando se hace efectiva la conexión, ocurrirá un reordenamiento de cargas, hasta restituir el equilibrio electrostático. Dicho equilibrio se alcanzará cuando ambas esferas adquieran el mismo potencial[5]. Una vez concluido el proceso transitorio, retiramos el cable. Denotaremos con letras primadas las magnitudes correspondientes al estado final. La Figura 5.14 esquematiza la secuencia de pasos.
De la conservación de la carga tenemos

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \tag{5.7}$$

De la igualdad de los potenciales tenemos

$$V_1' = V_2' \quad \to \quad \frac{kQ_1'}{R_1} = \frac{kQ_2'}{R_2} \quad \to \quad \frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{R_1}{R_2} \tag{5.8}$$

[5]Esto debe ocurrir porque el cable junto con las dos esferas, mientras dura la conexión, constituyen un único conductor. Por tanto, el potencial debe ser el mismo en todas las partes.

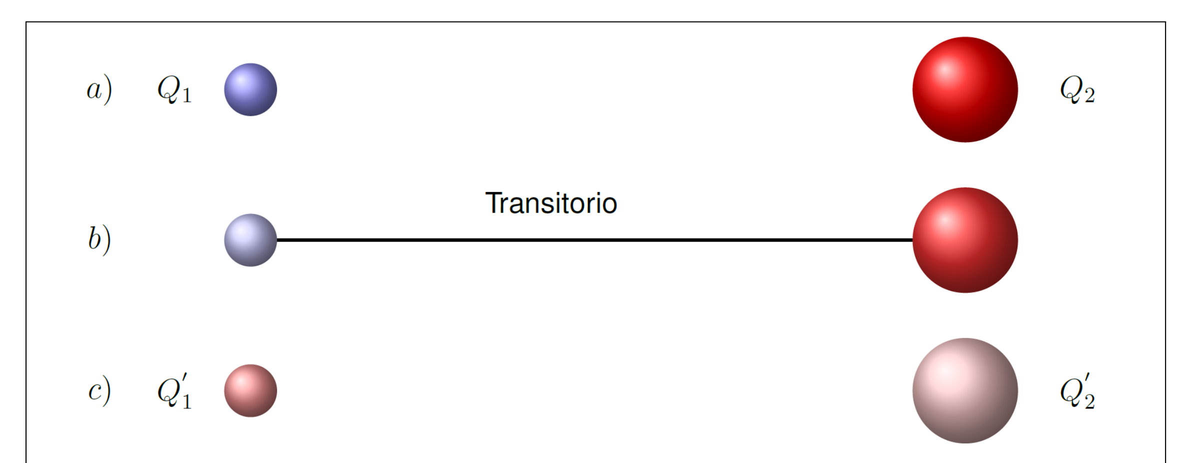


Figura 5.14: El esquema representa dos esferas conductoras muy alejadas entre sí, en una secuencia de estados. Primero están simplemente cargadas. Luego se las conecta mediante un conductor hasta recuperar el equilibrio electrostático. Finalmente se las desconecta, quedando ambas con el mismo potencial y con las cargas reorganizadas.

Obsérvese que esta conclusión coincide con la idea intuitiva desarrollada en secciones anteriores. Pero ahora tenemos presición: el cociente entre las cargas es igual al cociente entre los radios respectivos. Veamos qué sucede con las densidades.

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \frac{Q_1'}{4\pi R_1^2}\frac{4\pi R_2^2}{Q_2'} = \frac{Q_1'}{Q_2'}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2}\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{5.9}$$

Entonces, el cociente entre las densidades superficiales de carga es igual a la inversa del cociente de los radios respectivos. Esto significa que, una vez restituido el equilibrio electrostrático, la esfera de menor radio tendrá menor carga, pero mayor densidad superficial de carga y mayor módulo del campo electrostático justo afuera de la superficie.

5.11. Condiciones de contorno

Cuando existe una superficie límite entre dos medios cualitativamente diferentes, decimos que la misma es una frontera o un contorno. Las condiciones de contorno, en sentido físico, son propiedades de los campos (escalares o vectoriales) que, de acuerdo con las características de los medios en contacto, pueden deducirse a priori. Entonces, tales condiciones pueden imponerse en los cálculos, muchas veces como recurso indispensable para ciertas resoluciones.

En nuestro caso particular, estudiamos la superficie límite entre el vacío y un medio conductor[6].

Según hemos discutido ya ampliamente, el campo electrostático dentro de un conductor en equiliblibrio electrostático es nulo. Por esto, su volumen es equipotencial y, en particular, su superficie también lo es. Entonces la condición de contorno para el potencial es

$$V\left(\vec{r}_s\right) = V_0 \ \text{(constante)} \tag{5.10}$$

donde $\vec{r}_s$ representa cualquier punto de la superficie del conductor. Por su parte, las condiciones para el campo electrostático pueden sintetizarse como sigue

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(\vec{r}_s^{\,1}\right) &= \frac{\sigma\left(\vec{r}_s\right)}{\epsilon_0}\,\breve{n} \\ \vec{E}\left(\vec{r}_s^{\,2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde $\vec{r}_s^{\,1}$ y $\vec{r}_s^{\,2}$ son posiciones justo afuera y justo adentro de la frontera respectivamente, en inmediaciones del punto $\vec{r}_s$, mientras que $\breve{n}$ es el versor normal exterior a la frontera en $\vec{r}_s$.

5.12. Más generalizaciones y resumen de propiedades

Los tratamientos de las secciones anteriores admiten ser generalizados para cuerpos conductores de formas arbitrarias. Sin embargo, la complejidad matemática de tales generalizaciones nos impide abordarlas en este contexto. Por tanto nos restringiremos a enunciar, sin demostración, algunas propiedades generales que se agregan a la lista dada en la sección 8.7. Naturalmente, sugerimos que el lector reflexione sobre la consistencia de estos enunciados con los casos particulares tratados.

IV. La densidad superficial de carga es tanto mayor, cuanto menor sean los radios de curvatura de la superficie.

[6] Es habitual referirse a las superficies límite entre dos medios como interfaces. Observe que en singular la palabra es interfaz, la que podría interpretarse como “cara intermedia". Hacemos esta aclaración porque probablemente la palabra proviene de traducciones del inglés, y podría confundirse con “interfase" (“s" en lugar de “c"), que significa “intermedio entre dos fases" en terminología química.

V. El campo electrostático justo al lado de la superficie es proporcional a la densidad de carga residente en ese lugar de la superficie. La relación es

$$\vec{E}(\vec{r}_s^{\,+}) = 4\pi k\sigma(\vec{r}_s)\breve{n} = \frac{\sigma(\vec{r}_s)}{\epsilon_0}\breve{n} \tag{5.12}$$

donde $\vec{r}_s$ es una posición sobre la superficie, $\vec{r}_s^{\,+}$ es un punto infinitesimalmente próximo a $\vec{r}_s$ justo afuera de la superficie, y $\breve{n}$ es un versor normal exterior a la superficie en el punto $\vec{r}_s$.

5.13. Cavidades de paredes conductoras. Blindaje

Consideremos una cavidad cerrada de forma arbitraria que se encuentra dentro de un conductor (Figura 5.15 a)). Supongamos que la cavidad no aloja cargas en su volumen, mientras que cierto exceso de carga se encuentra en el conductor. Como ya sabemos, la carga se distribuirá sobre la superficie del conductor. Pero ahora el conductor tiene superficie de afuera y superficie de adentro. Entonces nos preguntamos ¿habrá carga distribuida en la superficie de adentro?...

Comencemos el análisis eligiendo una superficie cerrada S imaginaria completamente contenida en la parte material del cuerpo (ver Figura 5.15 b)). Esto es, que no asoma ni fuera del conductor ni dentro de la cavidad. Entonces si aplicamos la ley de Gauss sobre S tenemos

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{ds} \;=\; \frac{Q_{RS}}{\epsilon_0} \tag{5.13}$$

La integral es nula porque el campo es nulo sobre toda la superficie S. Entonces la carga Q_{RS} alojada en el interior de S también debe ser nula. Como no hay carga en la cavidad (por hipótesis), ni la puede haber en la parte maciza del conductor, concluimos que la carga neta sobre la superficie de la cavidad es nula.

El lector puede estar tentado de pensar que la pregunta ha sido contestada. Sin embargo, cabe una sutileza; ¿no podría ocurrir que en la superficie de la cavidad haya una región con carga positiva y otra región con carga negativa, tal que la carga total sea nula? En principio, el razonamiento anterior no permite descartarlo, y por tanto debemos indagar sobre esta posibilidad.

Nuestra estrategia consiste en razonar por el absurdo. Supongamos que efectivamente existe una distribución superficial de cargas en la frontera de la cavidad

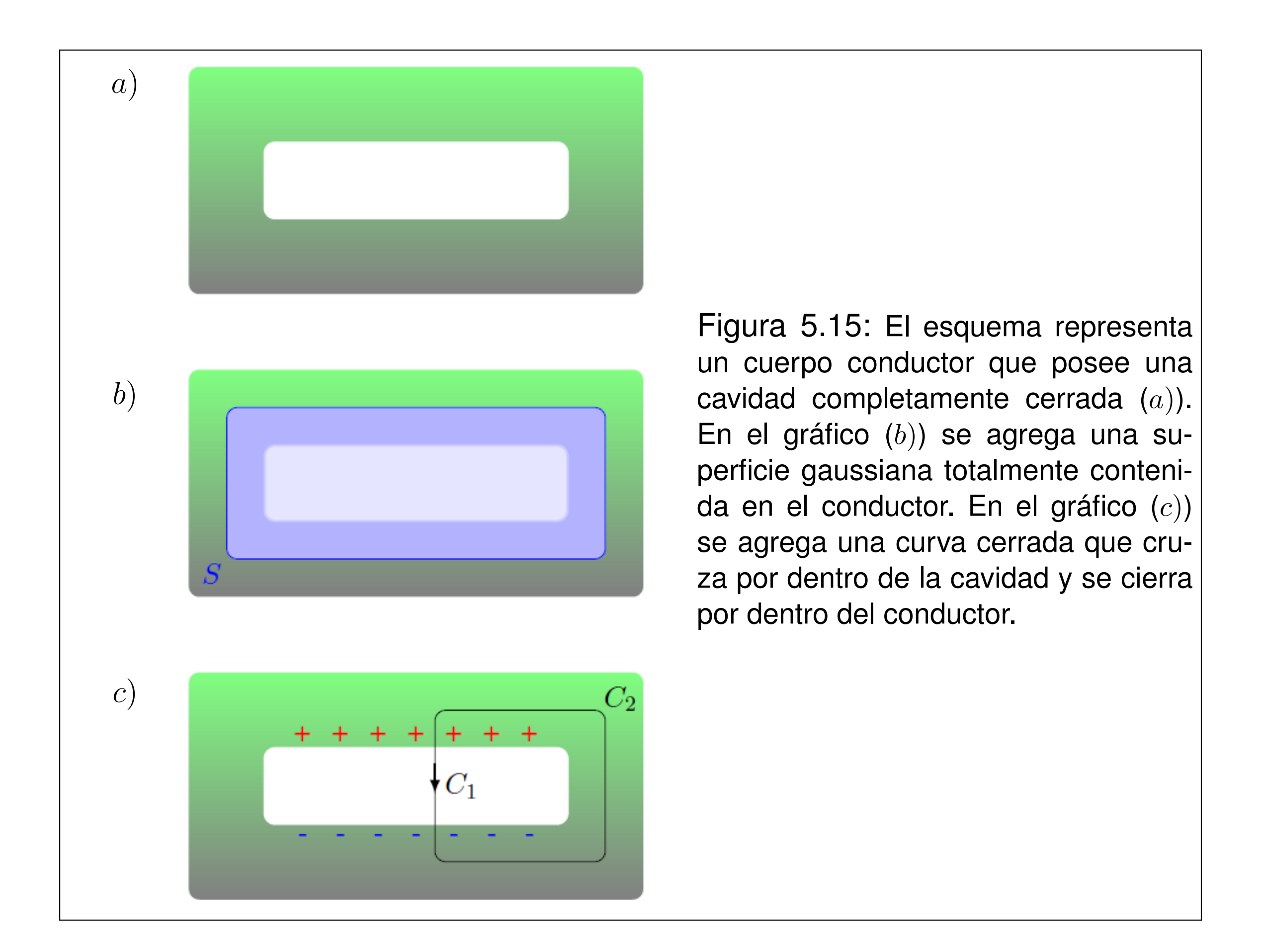


Figura 5.15: El esquema representa un cuerpo conductor que posee una cavidad completamente cerrada (a)). En el gráfico (b)) se agrega una superficie gaussiana totalmente contenida en el conductor. En el gráfico (c)) se agrega una curva cerrada que cruza por dentro de la cavidad y se cierra por dentro del conductor.

(ver Figura 5.15 c)). Como la carga total debe ser nula, habrá una región con carga positiva y otra región con carga negativa. Entonces, en el interior de la cavidad habrá líneas de campo que comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Elijamos una de dichas líneas, identificándola como el tramo de curva C_1. Luego, imaginamos un segundo tramo de curva C_2, cuyos puntos extremos coinciden con los extremos de C_1, pero se desarrolla dentro de la parte maciza del conductor. Observe que la unión de C_1 y C_2 constituye una curva cerrada, a la que llamaremos C. Entonces, como el campo electrostático es conservativo, debe cumplirse que

$$C = C_1 U C_2 \qquad \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \tag{5.14}$$

La integral sobre C_2 es nula por ser nulo el campo $\vec{E}$ dentro del conductor. Entonces

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} \; = \; 0 \qquad (5.15)$$

Para analizar la integral sobre C_1 comencemos por reconocer que $\vec{E}$ sobre una línea de campo nunca se invierte. Es decir que el campo siempre apunta en el sentido en que se recorre la curva desde la carga positiva hacia la carga negativa. Si adoptamos esta misma orientación para los vectores diferenciales $\vec{dl}$, observamos que la integral sobre C_1 suma sobre términos estrictamente positivos. Por tanto la integral resulta estrictamente positiva. Esto es

$$\int_{C_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} \; > \; 0 \qquad (5.16)$$

Las expresiones (5.15) y (5.16) son claramente contradictorias. Dicha contradicción proviene de suponer que existe carga distribuida en la superficie de la cavidad. Por tanto, hemos probado que, bajo las hipótesis propuestas, no habrá carga distribuida en las superficies de cavidades cerradas.

El análisis anterior es válido para el caso en que un exceso de carga reside en el conductor. Ahora bien, tal exceso puede ser un exceso neto debido al agregado o sustracción de electrones de conducción. Pero también puede aplicarse al caso de las cargas circulantes en el proceso de inducción. Cuando este es el caso, se dice que el conductor sirve de *blindaje* a la cavidad. Esta terminología responde a que el campo externo no puede “propagarse" dentro de la cavidad, impedido por el recubrimiento del conductor. Esta propiedad es ampliamente utilizada como recurso tecnológico para blindar instrumentos que pudieran ser afectados por campos eléctricos externos. Aunque el análisis fue realizado para una cavidad cerrada, los blindajes funcionan aún cuando el conductor no rodea completamente la región a proteger. Estos blindajes abiertos se conocen como **jaulas de Faraday**, y constituyen una extensión (no tan inmediata) de los conceptos explicados.

5.14. Efecto de puntas

Cuando un conductor de forma arbitraria posee un exceso de carga eléctrica, dicho exceso se reparte en su superficie. La densidad superficial de carga en general no será uniforme, a menos que el cuerpo sea altamente simétrico. Lo que siempre ocurrirá es que el cuerpo sea un volumen equipotencial. Un ejemplo de ello, es el cuerpo formado por las dos esferas del apartado 5.10, cuando las

mismas están conectadas mediante un conductor. Según la relación (5.9), las densidades superficiales en cada esfera están en relación inversa a sus respectivos radios.

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} = \frac{R_2}{R_1} \quad \rightarrow \quad \sigma_1' R_1 = \sigma_2' R_2 \tag{5.17}$$

Esta relación puede interpretarse (en un sentido no estricto), como que el producto de la densidad superficial de carga por el radio de curvatura local de la superficie es una constante sobre toda la superficie del cuerpo[7]. Así tendremos que la mayor densidad de carga estará en los lugares donde la curvatura de la superficie sea más pequeña.

En particular, las puntas poseen radios de curvatura extremadamente pequeños, por lo que las densidades de carga en ellas son muy grandes. Por ejemplo, si un cubo metálico macizo posee un exceso de carga, sus vértices presentarán la máxima densidad de carga. En menor grado habrá carga en las aristas, y por último podrá haber una densidad muy baja en las caras. Esta propiedad selectiva de la carga en relación con su distribución en la superficie de los conductores da lugar al llamado **efecto de puntas**.

5.15. Sobre tormentas eléctricas y pararrayos

Las tormentas eléctricas son extraños espectáculos que despiertan a la vez fascinación y terror. Antiguamente era bien conocida la capacidad destructiva de los rayos, que solían producir la muerte fulminante por electrocución a personas y animales. La invención del pararrayos ha sido la solución que redujo notablemente los daños ocasionados por rayos.

Para comprender el funcionamiento del pararrayos es importante saber lo que ocurre en la atmósfera durante las tormentas eléctricas. Comencemos por reconocer que las nubes han adquirido una cantidad de carga muy importante, mediante mecanismos que no discutiremos aquí. Pensando en la Tierra como una gran esfera conductora, la parte de su superficie que queda justo debajo de la nube, adquirirá carga de signo opuesto por inducción. Entonces, entre la nube y la Tierra se desarrollará un campo electrostático vertical, que resultará tanto más intenso cuanto mayor sea la concentración de carga en la nube.

[7]El caracter informal de esta relación reside en que no es posible ajustar una forma arbitraria de superficie localmente con una esfera, salvo en casos excepcionales. En general esto podrá hacerse con un elipsoide, por lo que debieran especificarse dos radios en lugar de uno para definir la curvatura.

Ahora analicemos lo que le ocurre a las moléculas del aire, cuando son afectadas por un campo eléctrico. Observando que las mismas están formadas por partículas cargadas, es fácil intuir que los núcleos estarán afectados por fuerzas a favor del campo, mientras que los electrones estarán afectados por fuerzas opuestas al campo. Dado que las moléculas son neutras, las fuerzas en un sentido y en otro serán de igual magnitud. Consecuentemente, las moléculas se mantendrán estáticas, aunque internamente tensionadas. Esta tensión mecánica será tanto mayor cuanto más intenso sea el campo electrostático local. Naturalmente, la molécula no puede soportar tensiones más allá de cierto límite que, al ser superado genera la rotura con la consecuente separación de cargas. Así, las moléculas que formaban un gas neutro se rompen, dando lugar a la formación temporaria de un plasma. En estas condiciones, las cargas liberadas viajan vertiginosamente en sentidos opuestos. La recombinación de cargas que restituye el estado neutro, es una violenta reacción química que da lugar al fenómeno luminoso y sonoro del rayo. Aquí cabe preguntarse acerca del sitio en que se iniciará el rayo. La respuesta es bastante evidente. A medida que la nube concentra más carga, el campo electrostático se intensifica proporcionalmente. La rotura de la primera molécula ocurrirá en el punto en que el campo alcance primero la intensidad necesaria para inducir dicha rotura.

El modelo más elemental de pararrayos puede pensarse como un largo conductor conectado a la Tierra, que se eleva sobre la superficie hasta alcanzar una altura superior a todos los objetos de su entorno. Además, su extremo superior se debe tallar con forma de punta. En la práctica, estos dispositivos se instalan en la parte más alta de los edificios, torres, chimeneas, etc., cuidando que el conductor que llega a tierra sea suficientemente grueso y su conexión muy confiable. Analicemos ahora cómo funciona. Para ello, recordemos el problema de dos esferas conductoras de distintos radios conectadas entre sí. El pararrayos y la Tierra constituyen un caso particular de este montaje, donde la punta puede interpretarse como una esfera de radio diminuto, conectada por un conductor a una esfera de radio enorme (la Tierra). Como ha sido discutido oportunamente, la densidad superficial de carga en la punta será muy grande en comparación con la que habrá en la superficie de la Tierra. Consecuentemente, el campo electrostático justo al lado de la punta será también muy grande en comparación con el que habrá en su entorno. A medida que el fenómeno inductivo desarrollado por la influencia de la nube se hace más intenso, el campo crece proporcionalmente en toda la región. En particular, en el entorno de la punta del pararrayos el campo eléctrico será más intenso que en cualquier otra parte, y al aumentar será donde primero se alcance el límite de rotura molecular. Así, el rayo se originará en la punta del pararrayos, y se desarrollará hacia la nube, protegiendo de descargas eléctricas a todo su entorno. En cierto modo, podríamos decir que el pararrayos es un dispositivo que funciona eligiendo el punto de inicio del rayo en un lugar



Figura 5.16: Noche de tormenta en la Ciudad de La Plata. Foto Federico Bareilles

inofensivo. Observe el lector que esta tecnología no evita los rayos, ni tampoco los detiene como parece indicar el nombre del dispositivo. Por el contrario, los propicia, pero en condiciones controladas.

5.16. Problemas

1. Las siguientes cuestiones ayudan a comprender el proceso de descarga a tierra.

   a) ¿Por qué un cuerpo metálico esférico aislado y con carga neta, tiene distribución superficial de carga uniforme?

   b) Considere dos esferas metálicas idénticas, a las que denotaremos por 1 y 2. La 1 está inicialmente cargada y la 2 neutra. Suponga que primero se las pone en contacto y luego se las separa. ¿Habrá desplazamiento de cargas durante este proceso? ¿Se modificará la carga total del sistema? ¿Cómo resultarán comparativamente las cargas finales de ambas esferas?

   c) Responda nuevamente las preguntas del inciso (b), si ahora la esfera 2 tiene radio mayor que la 1.

   d) De acuerdo al razonamiento desarrollado en (c), ¿Cuál será la carga final de cada esfera si la 2 tuviera un radio millones de veces mayor que la 1?

2. *a*) Describa los procedimientos de carga de un electroscopio por contacto y por inducción.

   b) Suponga que un electroscopio se mantiene cargado por inducción. Si en tales condiciones se lo conecta a tierra, sus hojuelas se cierran. ¿Por qué? Si luego se retira la carga que lo mantiene inducido, las hojuelas se abren de nuevo. ¿Por qué?

3. Dos esferas conductoras idénticas (a las que rotularemos como 1 y 2) tienen igual carga, y se mantienen en posiciones fijas de modo que la distancia entre ellas es muy grande comparada con sus diámetros. Las mismas se repelen entre sí con una fuerza de $100\,$N. Una tercera esfera (a la que llamaremos 3) es también idéntica a las otras dos, se encuentra inicialmente descargada y sostenida por un mango aislante. Luego ocurre la siguiente secuencia de contactos: primero se toca la esfera 1 con la 3; sin descargar la esfera 3, se toca con ella a la esfera 2; finalmente, se retira la esfera 3, quedando solo las dos primeras. Calcule la fuerza entre las esferas 1 y 2 al final del proceso.

4. Dentro de un conductor de forma irregular, existe una cavidad completamente cerrada. Suponga que en el conductor reside un exceso de carga distribuida que ha alcanzado el equilibrio electrostático. Demuestre que si no hay carga alojada en el interior de la cavidad, entonces el campo electrostático en el interior de la misma es siempre nulo.

5. Investigue:

   Cuando se aproxima una tormenta eléctrica, en ocaciones los marineros en altamar observarán un fenómeno conocido como “fuego de San Telmo", que consiste en una luz azulada que parpadea en la parte superior de los mástiles. ¿Qué es lo

que ocasiona el fenómeno? ¿Por qué ocurre en las puntas de los mástiles? ¿Por qué es más pronunciado cuando los mástiles están mojados?

6. Una esfera metálica de 50 cm de radio se carga al transferirle 10^{17} electrones.
   a) Halle el potencial electrostático en la esfera.
   b) Determine el campo electrostático en un punto exterior, justo al lado de la superficie.
   c) Obtenga la fuerza sobre un protón que se encuentra a 1 m del centro de la esfera.
7. Considere dos placas conductoras planas y paralelas separadas 2 cm, sobre las cuales existen cargas de igual magnitud y signos contrarios. Justo al lado de la placa negativa, se liberan electrones en reposo, que alcanzan la placa positiva en 15 ns.
   a) Determine la intensidad del campo electrostático entre las placas.
   b) Calcule la velocidad de los electrones cuando llegan a la segunda placa.
   c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?
8. Considere dos cilindros metálicos coaxiales infinitamente largos. El interno es macizo y de radio R, mientras que el externo se desarrolla entre los radios interior $9\,R$ y exterior $10\,R$. La carga por unidad de longitud del cilindro interno es de -10 pC/m, mientras que el externo es neutro.
   a) Determine el potencial electrostático en todas partes como función de la coordenada radial r, tomando como referencia un punto situado sobre el eje de simetría del montaje.
   b) Determine la densidad superficial de carga en las tres superficies cilíndricas.
9. Dos cortezas conductoras esféricas concéntricas de radios $R_1 = 0,5$ cm y $R_2 = 1$ cm, poseen cargas netas $Q_1 = -20$ nC y $Q_2 = 50$ nC respectivamente.
   a) Construya un esquema mostrando cómo se distribuyen las cargas sobre las cortezas.
   b) Calcule el potencial de la corteza interior, tomando como referencia un punto infinitamente alejado.
10. Considere dos esferas metálicas de radios $R_1 = 24$ cm y $R_2 = 6,2$ cm, que inicialmente poseen cargas $Q_1 = 35$ pC y $Q_2 = 5$ pC respectivamente. Las mismas se encuentran emplazadas de modo que entre sus centros hay una distancia de varios metros. Utilizando un hilo conductor, se las pone en contacto durante suficiente tiempo hasta que se restablezca el equilibrio. Determine sobre cada esfera los valores finales de potencial, carga, densidad de carga superficial y módulo del campo electrostático justo al lado de la superficie ¿En qué ha utilizado la hipótesis según la cual las esferas están alejadas varios metros?

11. Basándose en los resultados del problema anterior, trate de explicar el funcionamiento de los siguientes montajes:

    a) El pararrayos (relacionado con el poder de las puntas).

    b) La conexión a tierra.

Capítulo 6
Capacidad y capacitores

6.1. Concepto de capacidad

Hasta este punto hemos aprendido que, en condiciones electrostáticas, los cuerpos conductores resultan “volúmenes equipotenciales". Ahora nos proponemos analizar la relación existente entre el potencial adquirido por un cuerpo conductor, y la carga neta residente en su superficie. A modo introductorio, recordemos que una esfera de radio R que posee una carga Q, adquiere un potencial V (respecto del infinito) dado por

$$V = \frac{kQ}{R} \tag{6.1}$$

Esta expresión permite observar una propiedad que se repite en todos los cuerpos, que podría sintetizarse como sigue: El potencial observado sobre el cuerpo (respecto del infinito), es proporcional a la carga que posee. La diferencia que presentan los cuerpos respecto de esta propiedad, queda siempre restringida a la constante de proporcionalidad. Entonces cabe definir una magnitud característica del cuerpo, asociada con dicha constante, llamada **capacidad**. La misma se representa por C y se define como el cociente entre la carga Q residente en el cuerpo y el potencial V adquirido por el mismo

$$C = \frac{Q}{V} \tag{6.2}$$

Esta definición permite evaluar la capacidad a partir de las mediciones simultáneas de carga y potencial sobre el cuerpo. Sin embargo la capacidad contiene solo información geométrica acerca del cuerpo. Por ejemplo en el caso de la

esfera tenemos

$$C = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \qquad (6.3)$$

En otras palabras, la capacidad es una propiedad intrínseca del cuerpo, y por tanto inalterable mientras el cuerpo no experimente modificaciones geométricas[1].

La unidad de capacidad es el **Faradio**, que se representa por F. Su relación con las unidades introducidas hasta ahora es

$$[C] = \mathsf{F} = \frac{\mathsf{C}}{\mathsf{V}} = \frac{\mathsf{C}^2}{\mathsf{J}} \qquad (6.4)$$

Aunque en la actualidad existen dispositivos cuya capacidad es del orden del Faradio, la unidad es demasiado grande. En tal sentido, se usan más frecuentemente los submúltiplos *microfaradio* (μF) y *nanofaradio* (nF).

6.2. Capacidad en sentido relativo

Consideremos dos cuerpos conductores que mantienen fijas sus posiciones relativas. Supongamos que ambos son originalmente neutros, y que elegimos la referencia de potencial en uno de ellos (cuerpo 1). Ahora imaginemos una transferencia de carga del cuerpo 1 al 2, de modo que al final del proceso, las cargas respectivas serán $-Q$ y Q. En estas condiciones, podemos calcular el potencial del cuerpo 2, que de acuerdo con la referencia elegida, coincide con la diferencia de potencial entre ambos cuerpos. En estas condiciones, definimos la **capacidad relativa del sistema** como el cociente entre la carga adquirida por el cuerpo 2 y su potencial respecto del cuerpo 1.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (6.5)$$

Esta definición es formalmente análoga a la propuesta en la sección anterior, aunque la incorporación de un “cuerpo" de referencia la hace operativamente más adecuada (como veremos en las aplicaciones). Nuevamente, la capacidad

[1] El factor ϵ_0 que aparece en el ejemplo de la esfera, también aparece en todos los cuerpos conductores. El mismo debe interpretarse como un indicador que da cuenta de que el espacio que rodea al cuerpo es enteramente vacío. En tratamientos posteriores, veremos que la capacidad también depende del medio circundante.

es una propiedad intrínseca del sistema, que depende de la geometría. Esto es, de la forma de cada cuerpo y de la posición y orientación relativas entre ambos. Además, la capacidad podrá depender de las propiedades del medio en el que se encuentran inmersos los cuerpos conductores. Como hasta este punto, nuestro análisis ha sido aplicado solo a cuerpos en el vacío, las expresiones de capacidad solo contendrán la constante ϵ_0.

6.3. Capacitores

Cuando el sistema de dos cuerpos conductores de la sección anterior se diseña con fines tecnológicos, toma el nombre de **capacitor**. El desafío tecnológico consiste en producir capacitores pequeños de gran capacidad. Analizaremos ahora algunas claves de estos diseños a partir del estudio del más simple de los montajes, esto es, el capacitor de placas plano-paralelas.

Consideremos dos placas metálicas de área A, emplazadas paralelamente de modo que la distancia entre ellas es d. Diremos que el capacitor está cargado con carga Q, cuando en sus placas residen respectivamente cargas $-Q$ y Q. Diremos además que la diferencia de potencial (o simplemente el potencial) del capacitor, será la magnitud medida sobre la placa de carga Q respecto de la otra placa.

No resulta a priori sencillo entender la forma que adopta la distribución de cargas en este tipo de capacitores, por lo que nos limitaremos a describirlo sin una fundamentación sólida[2]. En general se considera una buena aproximación, suponer que las cargas se distribuyen uniformemente en las caras enfrentadas de ambas placas. Entonces, a menos de pequeños efectos de borde, cabe modelar el capacitor como “una muestra finita" del sistema formado por dos planos infinitos uniformemente cargados con densidades $-\sigma$ y σ. Recordando el campo electrostático producido por un plano infinito uniformemente cargado, tendremos las contribuciones que se detallan en la Figura 6.1.

El lector observará que las contribuciones de ambas placas se cancelan en las partes exteriores, mientras que se refuerzan en la parte interna. Así tenemos que el campo interno es

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\breve{k} \tag{6.6}$$

El capacitor modelado de esta manera toma el aspecto que se muestra en la Figura 6.2, donde cada placa tiene área A y la distancia entre ellas es d.

[2]Una explicación adecuada de este fenómeno requiere técnicas abordables en un curso de electromagnetismo más avanzado.

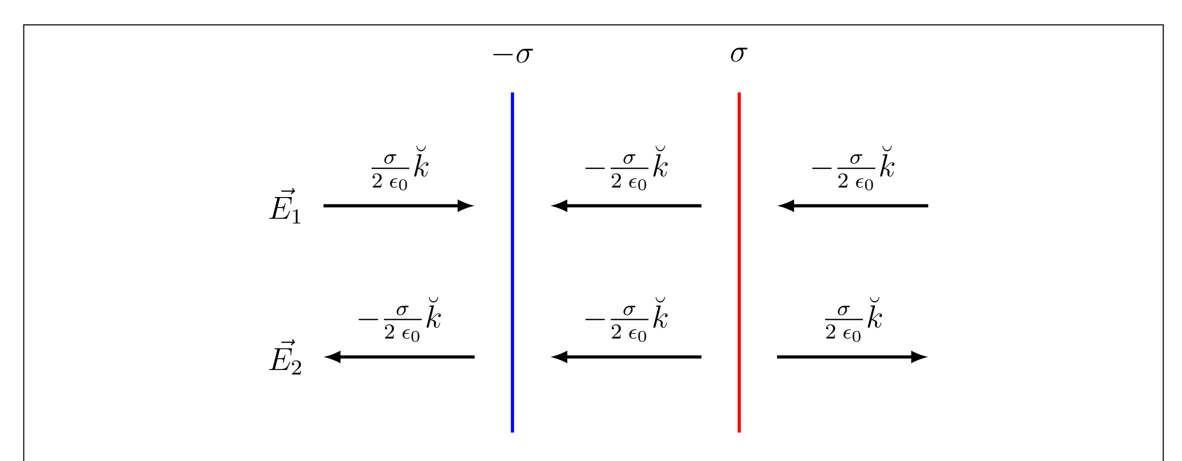


Figura 6.1: En el esquema se indican dos placas infinitamente extendidas, con densidades de carga $-\sigma$ y σ uniformes. Además se indican los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ producidos por cada placa en las distintas regiones.

Con la técnica de resolución habitual, el potencial en la placa 2, con respecto a la placa 1 será

$$V = -\int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_0^d \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\breve{k}\right)\cdot dz\breve{k} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int_0^d dz = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \qquad (6.7)$$

Reemplazando la densidad de carga σ (que en nuestro modelo es uniforme), tenemos

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \qquad (6.8)$$

con lo que la capacidad resulta

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad (6.9)$$

Esta expresión muestra que la capacidad es tanto mayor, cuanto mayor sea el área de las placas y menor la distancia entre ellas. Esta es la clave de diseño de los capacitores que, aunque raramente son planos, respetan una regla similar: dos armaduras metálicas de gran área y muy próximas, son las claves para obtener capacidades significativas.

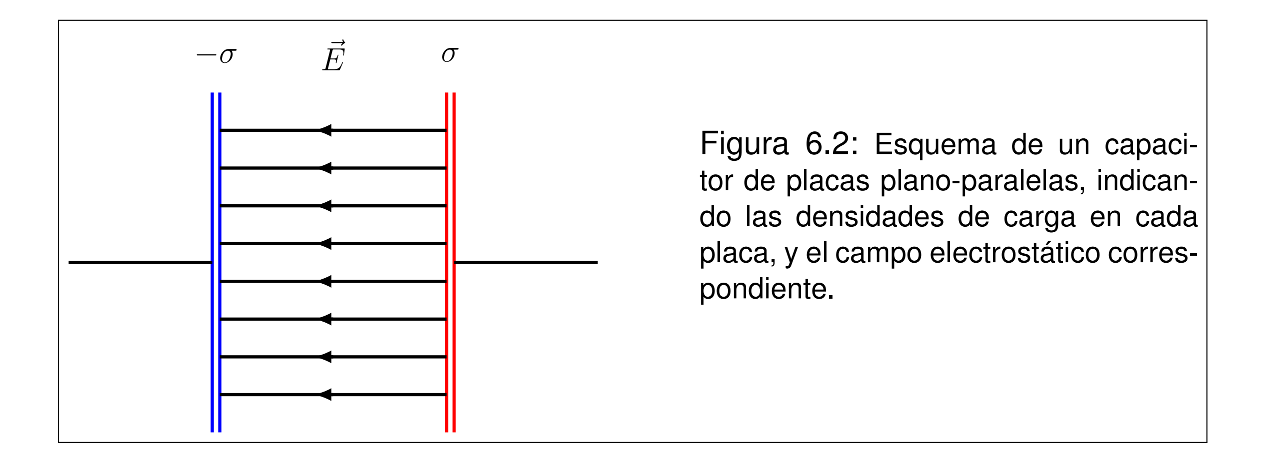


Figura 6.2: Esquema de un capacitor de placas plano-paralelas, indicando las densidades de carga en cada placa, y el campo electrostático correspondiente.

6.4. Ejemplo: Capacitor esférico

Consideremos el montaje formado por dos piezas metálicas esféricas. La pieza 1 es una esfera maciza de radio R_1, y la pieza 2 es un casquete esférico de radio interior R_2 ($R_2 > R_1$). Ambas piezas se montan en forma concéntrica. Supongamos ahora que la pieza 1 posee una carga $-Q$, mientras que la 2 tiene carga Q. Argumentos de simetría y la nulidad del campo electrostático en volúmenes conductores, llevan a que la carga se distribuya uniformemente sobre las superficies de radios R_1 y R_2. De los mismos argumentos se desprende que solo habrá campo electrostático en el espacio comprendido entre ambas superficies. Dicho campo tendrá la forma

$$\vec{E} \;=\; -\frac{kQ}{r^2}\,\breve{r} \tag{6.10}$$

Ahora calculamos el potencial de la pieza 2 respecto de la 1.

$$\begin{aligned} V \;&=\; -\int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} \;=\; -\int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{kQ}{r'^2}\,\breve{r}\right)\cdot dr'\breve{r} \;=\; kQ\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr'}{r'^2} \\ V \;&= kQ\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \end{aligned} \tag{6.11}$$

Para obtener la capacidad buscamos una forma más compacta para V

$$V \;=\; \frac{kQ\,(R_2-R_1)}{R_1R_2} \;=\; \frac{Q\,(R_2-R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1R_2} \tag{6.12}$$

Entonces

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{6.13}$$

Esta expresión es muy apropiada para analizar la influencia de la “forma" del capacitor, respecto de la regla de diseño propuesta en la sección 6.3. Para este caso, si la distancia d entre superficies es muy pequeña, tendremos que

$$d = R_2 - R_1 \qquad R_1 \approx R_2 = R \tag{6.14}$$

con lo que la capacidad toma la forma

$$C = \frac{\epsilon_0 \, 4\pi R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{6.15}$$

Esta expresión es idéntica a la obtenida para capacitores plano-paralelos, por lo que cabe concluir que, al menos entre las formas analizadas, la capacidad se hace poco sensible a la forma del dispositivo, cuando la distancia entre conductores es muy pequeña.

6.5. Una analogía esclarecedora

Antes de abordar el análisis de la carga de un capacitor, conviene examinar una analogía hidráulica. Imaginemos dos recipientes con sus bases unidas por un tubo. El nivel de líquido será el mismo en ambos recipientes. Supongamos que el tubo de conexión posee una exclusa y una bomba (ver Figura 6.3 a)). Consideremos ahora que inicialmente la exclusa está abierta, y se pone en marcha la bomba. Entonces el líquido sube en el recipiente de la izquierda y baja en el de la derecha. Este proceso continúa hasta alcanzar el límite de la capacidad de la bomba. Si ahora se cierra la exclusa, los niveles de líquido quedarán como en la Figura 6.3 b).

Analicemos algunos aspectos de lo ocurrido. En primer lugar, nótese que la bomba hizo trabajo sobre el fluido, que se manifiesta presentando un “desnivel". Este desnivel puede considerarse como, una “reserva de energía", aportada por la bomba, que puede “guardarse" en el dispositivo formado por los dos recipientes. El montaje puede ser transportado sin perjuicio de la energía que almacena y la misma puede ser utilizada cuando sea necesario. ¿Cómo se la puede utilizar? Simplemente colocando en el lugar de la bomba, una máquina hidráulica

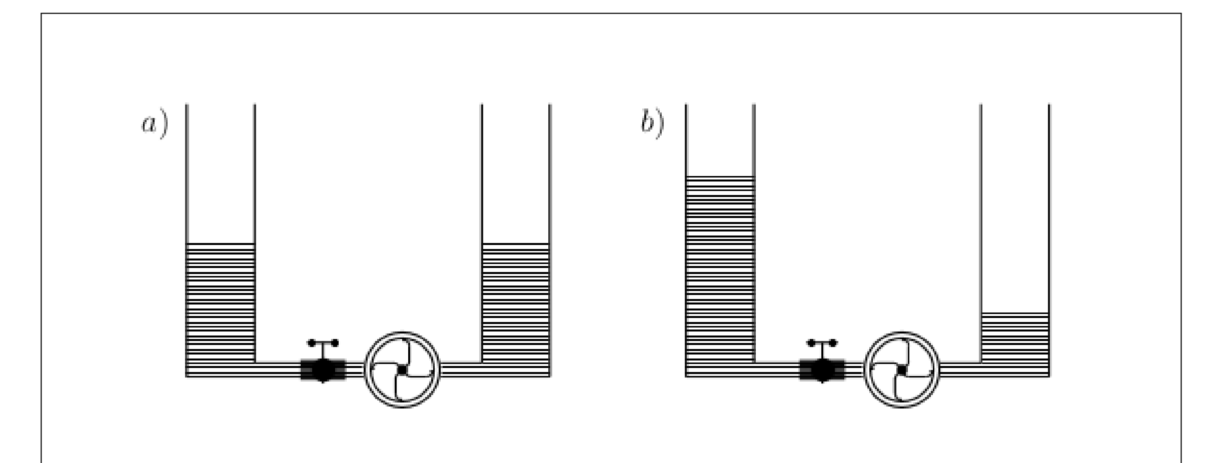


Figura 6.3: Analogía hidráulica del funcionamiento de un capacitor. Se trata de un tubo en forma de U, que posee una bomba y una exclusa en la conexión de sus brazos. La figura $a)$ representa el agua en estado de equilibrio. La figura $b)$ muestra lo que ocurre después de que opera la bomba y se cierra la exclusa.

cualquiera que se accione por circulación del fluido a través de ella. Observemos además que el fluido devolverá la energía almacenada con la asistencia de un campo conservativo: el campo gravitatorio.

En varios aspectos, los capacitores funcionan en forma análoga al sistema hidráulico presentado. En la sección siguiente desarrollaremos la analogía.

6.6. Carga de capacitores

En primer lugar, corresponde que interpretemos el capacitor como el montaje formado por los dos recipientes. Por su parte, el campo electrostático residente en el capacitor cargado, juega un papel análogo al del campo gravitatorio. El objeto eléctrico equivalente a la bomba es una pila. Aunque más adelante trataremos en detalle el funcionamiento de la pila, en este punto la introducimos simplemente como un objeto que puede aportar energía y garantizar una diferencia de potencial (de la misma manera que la bomba puede producir una diferencia de alturas en los niveles de fluido en cada recipiente).

Por último, la exclusa puede homologarse con un interruptor. Los símbolos usuales se muestran en la Figura 6.4, y luego se los combina para representar un sistema análogo al montaje hidráulico. Este tipo de diagrama representa un **circuito**, donde las líneas que unen los elementos son conductores (por ejemplo, cables). En nuestro modelo didáctico lo análogo a los cables son los tubos por los que circula el fluido. ¿Qué podemos decir entonces de un capacitor cargado

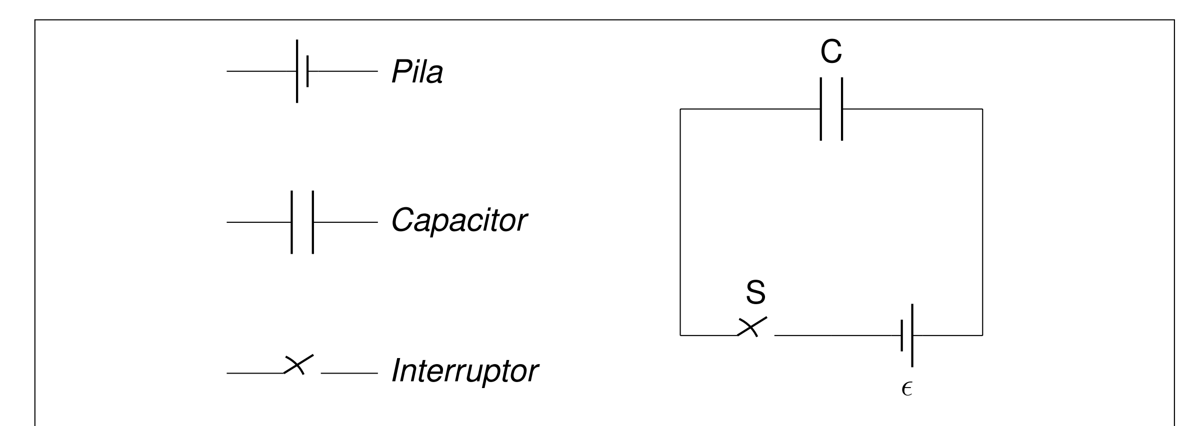


Figura 6.4: Simbología para la representación de circuitos con capacitores. El circuito de la derecha es uno de los más elementales posibles.

de esta manera?

I. Que alcanzará una diferencia de potencial equivalente a la que garantiza la pila.

II. Que acumulará energía cedida en forma de trabajo por la pila.

III. Que dicha energía podrá guardarse en el capacitor, aún cuando se haya desconectado la pila.

IV. Que la energía podrá ser devuelta por acción del campo electrostático residente en el interior del capacitor.

6.7. Conexión entre capacitores

Consideremos dos capacitores cuyas capacidades son C_1 y C_2. Suponga que se los conecta respectivamente a pilas que garantizan diferencias de potencial V_1 y V_2. Entonces, las cargas serán

$$Q_1 = C_1 V_1 \quad y \quad Q_2 = C_2 V_2 \tag{6.16}$$

Supongamos ahora que los capacitores se conectan como indica la Figura 6.5 $a)$. Aquí resulta muy importante observar la polaridad de los capacitores. Esto es, cuál de sus placas es positiva y cuál es negativa. Observemos el caso planteado en la Figura 6.5. Las placas de la izquierda están conectadas por un conductor, por lo que ambas deben tener el mismo potencial, al que podemos elegir como “cero".

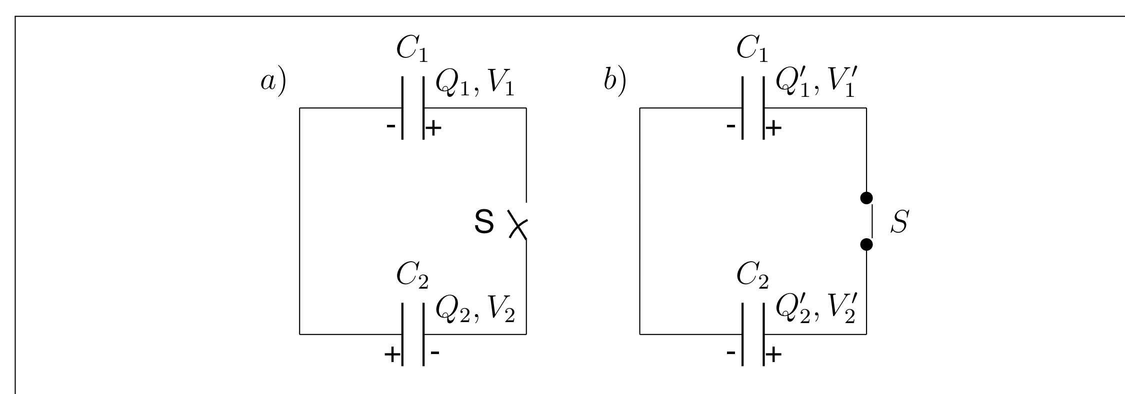


Figura 6.5: Conexión elemental entre dos capacitores. $a)$ Antes de cerrar el circuito cada capacitor tiene cargas arbitrarias Q_1 y Q_2, y los correspondientes potenciales (distintos) V_1 y V_2. $b)$ Al cerrar el circuito el sistema evoluciona hasta alcanzar el nuevo equilibrio electrostático, con cargas respectivas Q'_1 y Q'_2 y la misma diferencia de potencial V' en ambos capacitores.

Recordemos que la carga de un capacitor y su potencial se miden sobre una de las armaduras, respecto de la otra. Respetando una única referencia y observando los signos indicados en la Figura 6.5, tenemos que Q_1 y V_1 son magnitudes positivas, mientras que Q_2 y V_2 son negativas (observadas sobre las placas de la derecha).

Ahora supongamos que se cierra el interruptor S, de modo que luego de un breve lapso, el conjunto recupera el equilibrio electrostático. En las condiciones finales (Figura 6.5 $b)$), también el potencial del lado derecho debe ser el mismo en ambas placas. Entonces, si indicamos las magnitudes del estado final con letras primadas, tendremos

$$\begin{cases} V'_1 = \dfrac{Q'_1}{C_1} \\ V'_2 = \dfrac{Q'_2}{C_2} \end{cases} \qquad V'_1 = V'_2 \quad \rightarrow \quad \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} \tag{6.17}$$

Por otra parte, la conservación de la carga implica que

$$Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 \tag{6.18}$$

Las relaciones (6.17) y (6.18) constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es inmediata

$$Q_1' \;=\; C_1\,\frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2}\,, \qquad Q_2' \;=\; C_2\,\frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2} \tag{6.19}$$

Reemplazando en cualquiera de las primeras ecuaciones (6.17), obtenemos el potencial del estado final

$$V_1' \;=\; V_2' \;=\; \frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2} \tag{6.20}$$

Aquí debemos enfatizar que Q_1 y Q_2 tienen signos determinados por la *polaridad* que le corresponde a cada capacitor en la conexión inicial. Entonces la suma Q_1+Q_2 tendrá un signo que debe respetarse. La Figura 6.5 $b)$ corresponde al caso en que la suma es positiva. Entonces queda la polaridad indicada, y el potencial es mayor en las armaduras derechas que en las izquierdas. Pero habrá casos en que ocurre lo contrario, o más aún, que tanto las cargas finales y el potencial final resulten nulos. Dejamos a cargo del lector que analice las circunstancias en que pueda ocurrir esto.

6.8. Capacitores en serie y en paralelo

En algunas situaciones, dispositivos que forman parte de un circuito se conectan en formas que reciben nombres particulares. Nosotros veremos dos casos muy frecuentes de conexión que se conocen como serie y paralelo. A continuación describimos cada caso.

Conexión en serie: cuando dos capacitores inicialmente descargados, se conectan uno a continuación del otro, formando parte de un circuito más grande, se dice que están conectados en serie (ver Figura 6.6 $a)$). Note que una placa del capacitor 1 está conectada con una placa del capacitor 2, y el conductor que las une no tiene bifurcaciones.
Como inicialmente ambos capacitores están descargados, la carga total residente en las placas vinculadas y el cable que las une debe ser nula. Entonces si una placa adquiere carga Q, la otra debe tener $-Q$. En otras palabras, los dos capacitores adquieren la misma carga. Por otra parte, la diferencia de potencial entre los puntos A y B será la suma de las diferencias de potencial de cada capacitor. Esto es

$$Q_1 \;=\; Q_2 \;=Q \qquad \text{y} \qquad V_B - V_A \;= V_1 + V_2 \tag{6.21}$$

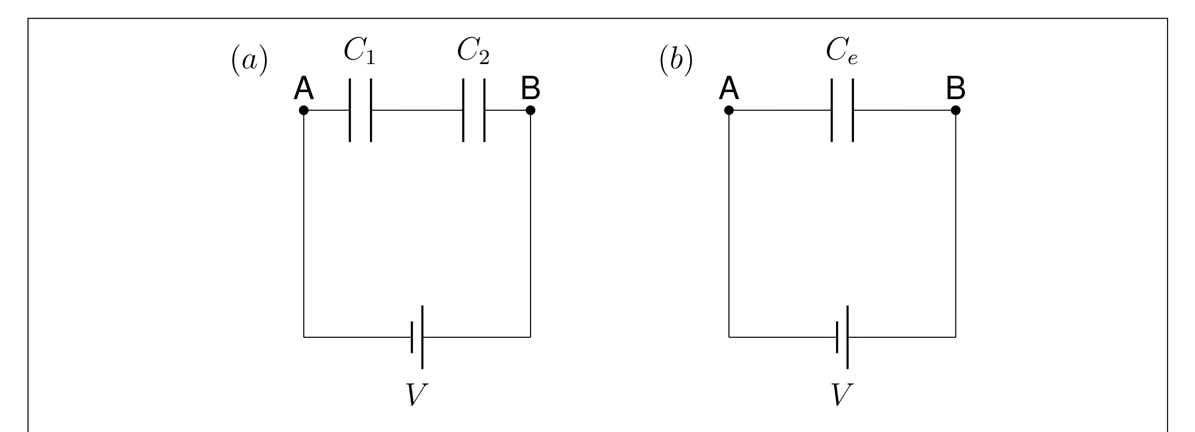


Figura 6.6: $a)$ Esquema de un circuito que contiene dos capacitores en serie. $b)$ Esquema del circuito equivalente, donde la serie ha sido reemplazada por un único capacitor.

Combinando estas expresiones tenemos

$$V_B - V_A \;=\; \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \;=\; Q\,\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \tag{6.22}$$

Ahora podríamos preguntarnos ¿será posible reemplazar los capacitores en serie, por un único **capacitor equivalente**? Si, podríamos. El circuito equivalente es el de la Figura 6.6 $b)$ y la **capacidad equivalente** debe satisfacer

$$\frac{1}{C_e} \;=\; \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{o bien} \quad C_e \;=\; \frac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2} \tag{6.23}$$

con lo que concluimos que

$$V_B - V_A \;=\; \frac{Q}{C_e} \tag{6.24}$$

Aquí observamos que el capacitor equivalente adquiere la misma carga Q cuando se lo somete a la misma diferencia de potencial $V_B - V_A$.

Conexión en paralelo: en la Figura 6.7 presentamos dos capacitores conectados en paralelo. El aspecto más relevante de esta conexión radica en que las placas de la izquierda están conectadas entre sí, por lo que ambas tienen el mismo potencial. Ocurre lo mismo con las placas de la derecha, por lo que cabe concluir que ambos capacitores presentan la misma diferencia de potencial $V_B - V_A$.

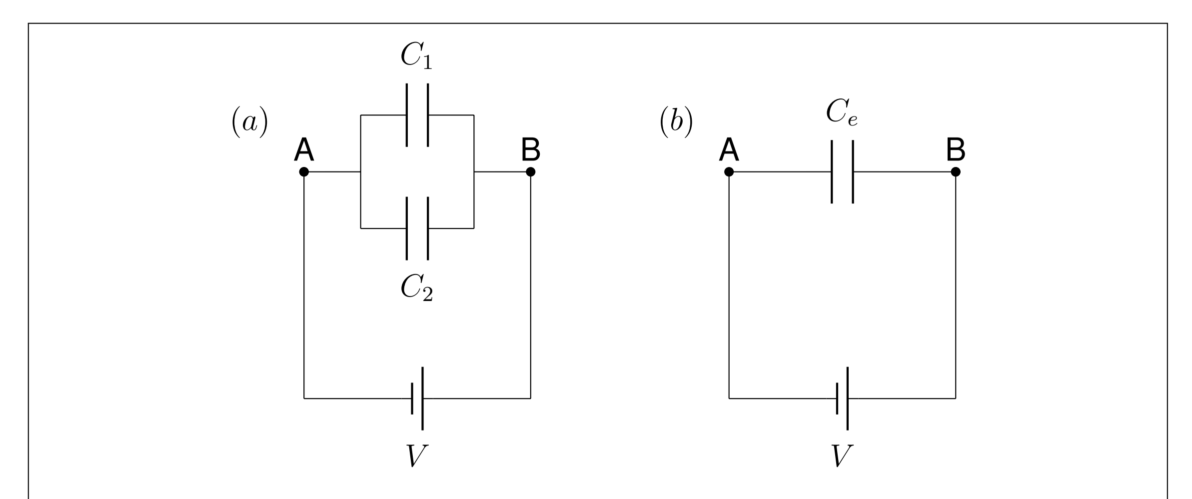


Figura 6.7: $a)$ Esquema de un circuito que contiene dos capacitores conectados en paralelo. $b)$ Esquema del circuito equivalente, donde se ha reemplazado el paralelo por un único capacitor equivalente.

Entonces

$$V_B - V_A \; = \; V_1 \; = \; V_2 \tag{6.25}$$

Nuevamente buscamos un capacitor equivalente, es decir que adquiera la misma carga total del conjunto cuando se lo somete a la misma diferencia de potencial. En este caso, la carga total es la suma de las dos cargas. Entonces tenemos

$$Q_1 + Q_2 \; = \; C_1 V_1 + C_2 V_2 \; = \; (V_B - V_A)\,(C_1 + C_2) \tag{6.26}$$

Definiendo la capacidad equivalente como

$$C_e \; = \; C_1 + C_2 \tag{6.27}$$

Reconocemos que

$$Q_1 + Q_2 \; = \; (V_B - V_A) \;\, C_e \tag{6.28}$$

6.9. Energía almacenada en un capacitor

Para evaluar la energía residente en un capacitor cargado, podemos calcular el trabajo cuasiestático que debe realizar un agente externo para cargarlo. Resolvamos el caso de un capacitor de capacidad C, que adquiere una carga Q. Comencemos por suponer que el proceso de carga ha ocurrido parcialmente, de modo que las placas poseen cargas $-q$ y q respectivamente (con $0 < q < Q$). El potencial de la placa positiva respecto de la negativa en estas condiciones será

$$V(q) \;=\; \frac{q}{C} \tag{6.29}$$

donde se agregó la dependencia funcional $V(q)$, para poner de manifiesto que el proceso de carga no ha terminado. Supongamos ahora que transportamos una nueva porción de carga dq desde la placa negativa a la positiva. El trabajo necesario para ello coincide con el aumento de energía potencial electrostática dU. Esto es

$$dW_{F_{EXT}} \;=\; dU \;=\; V(q)\,dq \;=\; \frac{q\,dq}{C} \tag{6.30}$$

El trabajo total realizado en el proceso, que coincide con la energía potencial electrostática adquirida se obtiene por integración de (6.30). Esto es

$$W_{F_{EXT}} \;=\; U \;=\; \int_0^Q \frac{q\,dq}{C} \;=\; \frac{Q^2}{2C} \tag{6.31}$$

Este resultado es de carácter general, ya que no se utilizaron detalles geométricos particulares de un montaje específico. Si llamamos simplemente V a la diferencia de potencial $V(Q)$ obtenida al final del proceso de carga, tenemos varias expresiones

$$U \;=\; \frac{Q^2}{2C} \;=\; \frac{1}{2}\,QV \;=\; \frac{1}{2}\,CV^2 \tag{6.32}$$

6.10. Problemas

1. Suponga que usted dispone de tres capacitores idénticos, cada uno de ellos de capacidad C.

   a) ¿Qué combinaciones de diferentes capacidades puede producir? Dibuje cada montaje, y determine sus capacidades equivalentes.

   b) Si les aplica a cada combinación la misma diferencia de potencial, ¿Cuál de ellas almacenará más energía?

2. Un capacitor de placas planas paralelas de área A y separación d, posee carga Q y se encuentra desconectado.

   a) Muestre que el módulo de la fuerza con que se atraen sus placas es

   $$F = \frac{Q^2}{2\,\epsilon_0\,A}$$

   b) Determine el trabajo que debe realizar un agente externo, para aumentar la separación hasta una distancia d' (con $d' > d$).

   c) Muestre que el trabajo realizado es igual al aumento de la energía potencial almacenada en el capacitor.

3. Los capacitores de la figura poseen las siguientes capacidades: $C_1 = 5\,\mu$F, $C_2 = 10\,\mu$F, $C_3 = 15\,\mu$F y $C_4 = 10\,\mu$F. La diferencia de potencial de la batería es $V_0 = 1,5$ V.

   a) Determine la capacidad equivalente del circuito y la carga en cada capacitor, cuando la batería se conecta entre los puntos A y B.

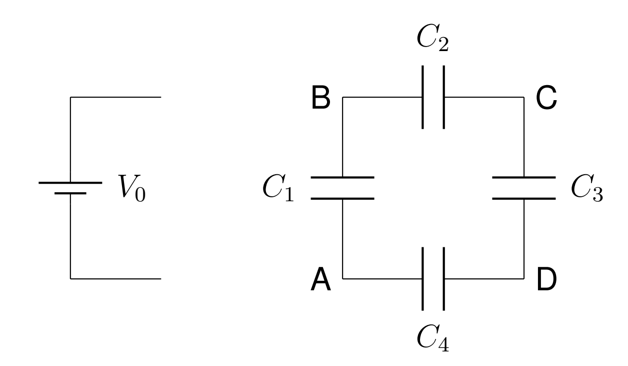
   b) Repita el análisis para el caso en que la conexión se realiza entre los puntos B y D.

   c) ¿Entre qué puntos debe realizarse la conexión para que el sistema tenga la máxima capacidad posible?

4. Dos capacitores de $C_1 = 5\,\mu$F y $C_2 = 2\,\mu$F se conectan respectivanente con fuentes de tensión de $V_1 = 20$ V y $V_2 = 40$ V. Una vez finalizado el proceso de carga, los capacitores se desconectan de las fuentes, quedando con cargas Q_1 y Q_2.

   a) En estas condiciones, se conectan entre sí las placas positivas y lo mismo se hace con las negativas. Calcule la diferencia de potencial y la carga final de cada capacitor.

   b) Repita el análisis para el caso en que se conectan entre sí las placas de distinto signo.

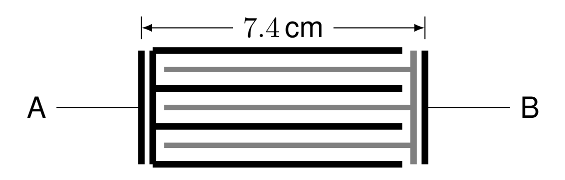


c) Para los casos (a) y (b), determine la energía total almacenada antes y después de las conexiones.

5. a) Determine las capacidades de los siguientes montajes en función de sus datos geométricos.
   1) Capacitor de placas planas paralelas circulares de radio R, separadas una distancia d (con $d << R$)[3].
   2) Capacitor formado por dos cortezas esféricas concéntricas de radios a y b (con $a < b$ y $b - a << a$).
   3) Capacitor formado por dos cortezas cilíndricas coaxiales de longitud l y radios a y b (con $a < b$ y $b - a << a$).

   b) En relación con los incisos (a)ii. y (a)iii., verifique que la capacidad obtenida puede aproximarse por la de un capacitor plano paralelo de igual superficie, cuando la distancia entre armaduras se hace muy pequeña.

6. Muchos dispositivos metálicos que forman parte de sistemas electromecánicos, suelen estar sometidos a diferencias de potencial. Como consecuencia, adquieren cargas eléctricas inesperadas que muchas veces resultan peligrosas. Por tanto conviene hacer una estimación de la capacidad para estar prevenidos. En el esquema se presenta el corte transversal de un dispositivo de 20 cm de largo, formado por chapas de 3 mm de espesor y separaciones del mismo espesor. El montaje se conecta a una fuente de tensión entre los puntos A y B. Determine la capacidad del montaje frente a este tipo de conexión (desprecie los efectos de borde).



[3] Cuando la distancia entre placas es muy pequeña, los campos electrostáticos de los capacitores planos tienen un comportamiento semejante al caso infinitamente extendido, y cabe despreciar los efectos de borde. Lo mismo ocurre con los capacitores cilíndricos.

Capítulo 7
Corriente eléctrica

7.1. ¿Qué es la corriente eléctrica?

Cuando desarrollamos los aspectos básicos de la electrostática, vimos que la carga eléctrica reside en partículas subatómicas (electrones y protones). También hemos observado que dichas partículas pueden tener distinto grado de movilidad (aunque hasta el momento solo tratamos casos estáticos). Recordemos, por ejemplo, que cuando un conductor se pone bajo la influencia de un campo electrostático externo, en él ocurre un reordenamiento de cargas, que implica un tránsito de electrones entre distintas partes del conductor sólido. Cuando decimos que un capacitor se carga, imaginamos que la carga *viaja* de alguna manera hasta situarse en las placas del capacitor. Estos ejemplos contienen todo lo necesario para comprender el concepto. Cada vez que existe un tránsito de partículas cargadas decimos que hay una **corriente eléctrica**. En general se considera que la corriente eléctrica es un concepto macroscópico, es decir que la carga se traslada en forma colectiva. En tal sentido, la corriente puede ser asimilada a un modelo de *fluido*, y la terminología física asociada al fenómeno suele tener muchas analogías (incluso el término corriente, proviene del mundo de los fluidos).

Aunque para fijar ideas, hemos utilizado ejemplos basados en *fluir* de electrones dentro de un conductor sólido, el concepto de corriente eléctrica es mucho más general. Ejemplos de naturaleza diferente se dan en medios semiconductores y dieléctricos. La corriente también fluye en medios con distintos estado de agregación (sólidos, líquidos y gases) y no existe ningún impedimento para que pueda ocurrir en el vacío. Los rayos en las tormentas eléctricas, los electrones en un tubo de rayos catódicos y la corriente en un diodo o en un transistor, son solo el inicio de una inmensa lista de fenómenos que involucran corrientes eléctricas.

7.2. Densidad de corriente

Como habíamos adelantado, la corriente eléctrica puede imaginarse como un fluido en el que lo que *fluye* son partículas cargadas. Ahora bien, la pregunta es ¿cómo la describimos? Pues parece natural describirla como fluido. Recordemos entonces que el modelo más simple de fluido es el que describe los casos laminares. En este modelo, las partículas tienen un comportamiento colectivo que permite identificar *líneas de flujo*, que resultan tangentes a la velocidad en cada punto. Entonces, en el caso de los fluidos puede definirse un campo vectorial (campo de velocidades) tal que las líneas de campo representan las trayectorias de las partículas.

Para describir el movimiento de partículas cargadas, comencemos por imaginar que sus trayectorias son suficientemente simples como para representarlas por un conjunto de líneas de corriente instantáneamente reconocibles. Estas líneas son tangentes a la velocidad de las partículas en cada punto. Podemos aprovechar el campo de velocidades como representación del flujo de partículas. Esto es efectivamente lo que se hace, pero con una variante leve. Se define un campo vectorial que se denomina **densidad de corriente eléctrica** $\vec{J}(\vec{r},t)$ cuyas líneas coinciden con las del campo de velocidades. Pero su módulo representa la cantidad de carga eléctrica que atraviesa una unidad de superficie perpendicular a la línea de corriente, por unidad de tiempo. Es importante observar que la magnitud $\vec{J}$ es una densidad *volumétrica*, ya que sus componentes dependen de la posición en un volumen.

Relacionemos la densidad de corriente $\vec{J}$ con la velocidad de las partículas. Supongamos que en cierto lugar del espacio, $n(\vec{r},t)$ representa la densidad de partículas cargadas en tránsito, en las inmediaciones del punto $\vec{r}$ y al tiempo t. Supongamos además que cada partícula posee una carga q, y se mueven en forma colectiva con una velocidad media $\vec{v}(\vec{r},t)$. Entonces

$$\vec{J}\,(\vec{r},t) \;=\; q\,n\,(\vec{r},t)\;\;\vec{v}\,(\vec{r},t) \tag{7.1}$$

Nótese que la densidad de corriente $\vec{J}$ siempre comparte la dirección con la velocidad media de las partículas, pero no necesariamente el sentido. En efecto, el sentido está condicionado por el signo de la carga q. Más aún, si cierta corriente de partículas positiva comparte el patrón de velocidades y densidades con una corriente de partículas negativas que viajan en sentido contrario, las densidades de corriente de uno y otro sistema son idénticas.

La mirada que hemos planteado hasta aquí está basada en el modelo microscópico, al menos en lo que concierne a que la carga viaja sobre partículas portadoras. Sin embargo, es importante enfatizar que la física de fluidos es una

teoría de medios continuos. Por lo tanto, debemos entender al campo vectorial $\vec{J}$ como perteneciente a una teoría de medios continuos, tal como debe considerarse el electromagnetismo que nosotros estudiamos. Siempre debemos recordar que el electromagnetismo clásico era una realidad de este mundo, cuando el electrón solo cabía en la ciencia-ficción.

7.3. Corriente eléctrica en sentido estricto

Aquí trataremos de aclarar algunas cuestiones semánticas respecto de **corriente eléctrica**. Estos vocablos definen el conjunto de fenómenos descriptos en las secciones anteriores. Pero también se usan para denominar al flujo del campo vectorial $\vec{J}$ a través de una superficie especificada. Supongamos que en cierta región existe un tránsito de partículas cargadas, que puede representarse por el campo vectorial $\vec{J}(\vec{r},t)$. Sea S una superficie imaginaria y $\vec{ds}$ sus vectores normales infinitesimales con una orientación previamente elegida. Entonces definimos la **corriente** $I(t)$ **a través de la superficie** S como

$$I\,(t)\;=\;\Phi_{\vec{J}S}\;=\;\int_S \vec{J}\,(\vec{r}_s,t)\cdot\vec{ds} \tag{7.2}$$

donde $\vec{r}_s$ representa los puntos incluidos en el dominio S. Observe que I no puede definirse independientemente de S, por lo que toda vez que se habla de una corriente es imprescindible especificar sobre qué superficie se la mide[1].

7.4. Continuidad de la carga

Volvamos por un rato a la mirada microscópica. Como la carga eléctrica reside en los electrones y los protones, la posibilidad de crear o aniquilar carga equivale a la posibilidad de crear o aniquilar las partículas que la contienen. La física actual viene de dar grandes pasos respecto del nacimiento y muerte de estas partículas, por lo que tales hechos ya no son imposibles. Sin embargo, las condiciones en que se produce la creación o aniquiliación de partículas no son tan usuales. Más aún, podemos decir que raramente ocurren en fenómenos terrestres cotidianos. Probablemente esta falta histórica de evidencias llevó

[1] En algunos textos, este flujo se define como **intensidad de corriente eléctrica**. Nosotros omitiremos en general la palabra intensidad, porque en física se suele reservar este término para otros fines.

a los pioneros del electromagnetismo a suponer que la carga eléctrica es una propiedad *permanente*, es decir que *no se crea ni se destruye*[2].

Siguiendo la línea histórica, nos preguntamos ¿cómo podrá describirse esta propiedad de permanencia de la carga? Formalmente decimos que la carga cumple con cierta *ecuación de continuidad*. Examinemos el término “continuidad". El mismo sugiere que *algo* debe continuar, es decir, seguir estando o seguir existiendo[3]. Hecha esta aclaración, conectemos algunas ideas. Supongamos que en cierta región del espacio existe una distribución de carga, que no se halla en equilibrio electrostático, a la que denotamos con $\rho(\vec{r},t)$. La dependencia temporal indica su variabilidad, la que solo puede ocurrir a expensas del traslado de cargas. Entonces, este tránsito de cargas define una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r},t)$. Ahora nos preguntamos ¿cómo se relacionan $\rho(\vec{r},t)$ y $\vec{J}(\vec{r},t)$? Comencemos por elegir una superficie cerrada cualquiera S con sus vectores diferenciales normales $\vec{ds}$ elegidos exteriores. Sea V el volumen interior a la superficie S. Entonces, el cambio de la carga total contenida en el volumen V, ocurrido en el lapso comprendido entre t y $t+dt$, debe coincidir con la cantidad de carga que atraviesa la superficie S en el mismo lapso. Esto es

$$d\left[\int_V \rho\left(\vec{r},t\right)\ dv\right] = -\left[\oint_S \vec{J}\left(\vec{r}_s,t\right)\cdot\vec{ds}\right]\ dt \tag{7.3}$$

O, en su forma más habitual

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\vec{r},t\right)\ dv + \oint_S \vec{J}\left(\vec{r}_s,t\right)\cdot\vec{ds} = 0 \tag{7.4}$$

Esta es la llamada **ecuación de continuidad de la carga**. Es importante que el estudiante recuerde la forma de esta ecuación, porque en el futuro se encontrará con muchas propiedades que, igual que la carga eléctrica, poseen la propiedad de permanencia y por tanto, satisfacen la misma ecuación. Tal vez el ejemplo más cercano sea la masa en la dinámica de fluidos.

[2]Algo similar ocurría en esos tiempos, en relación con la masa.

[3]Esta aclaración la hacemos para no caer en la tentación de suponer que el término alude a lo “continuo" en el sentido en que la palabra se usa, por ejemplo, cuando decimos “medio continuo". Seguir esta línea etimológica generaría solo confusión. Tal vez resultaría más apropiado decir *ecuación de permanencia*, en lugar de ecuación de continuidad.

7.5. Dinámica de la circulación de corriente eléctrica

Cuando tratamos la electrostática de los conductores, nos referimos a procesos transitorios que ocurren cuando un conductor es sometido a un campo externo. También vimos que partículas en el vacío responden acelerándose frente a los campos electrostáticos. Lo natural sería decir que las partículas cargadas son afectadas por los campos electrostáticos. Las fuerzas eléctricas que provienen de dichos campos promueven el movimiento de las partículas, siempre que sus ligaduras lo permitan. Supongamos que cierta partícula tiene masa m y carga q. Si la misma se encuentra exclusivamente bajo la acción de un campo electrostático $\vec{E}$, la fuerza eléctrica y la aceleración correspondiente serán

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \tag{7.5}$$

Pero, en realidad, conviene introducir otro punto de vista. Recordemos que el campo electrostático es conservativo, por lo que puede derivarse de un potencial (reflexione sobre la palabra “derivarse")

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{7.6}$$

Si el campo es no nulo, el potencial no puede ser constante. Entonces las partículas cargadas se mueven entre puntos con diferente potencial. O equivalentemente decimos que las partículas cargadas libres de moverse, efectivamente se moverán si existe una diferencia de potencial que las active.

Prestemos atención a los signos de las cargas. Como ya hemos visto, cuando un mismo campo actúa sobre partículas con cargas de distinto signo, produce fuerzas opuestas. Así, las cargas positivas son aceleradas hacia menores potenciales, mientras que las negativas se aceleran hacia potenciales mayores. Sin embargo, el análisis energético conduce a una conclusión que unifica las conductas. Para ello, comencemos por un tratamiento unidimensional. Supongamos que la partícula solo puede moverse en la dirección del eje x. Entonces las magnitudes en cuestión se relacionan como sigue

$$\begin{aligned} F_x &= qE_x \qquad & E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ U(x) &= qV(x) \qquad & F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned} \tag{7.7}$$

En primer lugar observemos que el campo y el potencial electrostáticos no dependen de la carga de la partícula (esto ya debe estar muy claro). Entonces observemos que tanto la fuerza como la energía potencial dependen de la carga. Ambas cambian de signo ante la permutación del signo de la carga. Pero esta influencia se neutraliza en la relación entre fuerza y energía, por lo que la fuerza “siempre" apunta hacia donde disminuye la energía potencial, independientemente del signo de la carga[4]. El tratamiento en tres dimensiones es análogo.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E} & \qquad \vec{E} &= -\vec{\nabla}V \\ U(\vec{r}) &= qV(\vec{r}) & \qquad \vec{F} &= -\vec{\nabla}U \end{aligned} \tag{7.8}$$

La discusión anterior, arroja cierta luz sobre una conducta bastante general de los sistemas físicos. *Cuando un sistema está afectado por fuerzas conservativas, evolucionará espontáneamente hacia estados de menor energía potencial, en tanto sus ligaduras se lo permitan.*

Si ahora pensamos en los procesos colectivos en que muchas partículas siguen patrones de movimiento análogos, podemos decir que una diferencia de potencial puede dar lugar a una corriente eléctrica. ¿Por qué decimos “puede dar lugar" en vez de afirmarlo? Simplemente porque el medio puede permitirlo o no. Una diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor promueve una corriente. Si ahora reemplazamos el medio por un dieléctrico, la misma diferencia de potencial no promueve nada[5].

Para terminar este análisis, podríamos preguntarnos ¿hasta cuándo podrá prolongarse una corriente eléctrica? Aunque parezca modesta, la pregunta es de capital importancia. En principio, podríamos argumentar que si un sistema de cargas no está en condiciones electrostáticas, entonces habrá corrientes eléctricas hasta tanto alcance dicho estado. ¿Pero siempre podrá alcanzar el equilibrio?... (no se pierda la próxima sección).

7.6. Corrientes estacionarias

Un problema tecnológico de nuestro tiempo consiste en sostener corrientes durante tiempos indefinidamente largos. El problema está parcialmente resuelto, dado que uno puede enceder la luz en su casa, y mantenerla encendida mientras

[4] Al estudiante que le cueste ver esta conclusión, le recomendamos que observe que el signo de la componente de la fuerza es opuesto al signo de la derivada de la energía potencial.

[5] A menos que la diferencia de potencial sea tan grande que cambie las propiedades del medio, convirtiéndolo en conductor.

quiera (claro que esto tiene un costo...). Así estamos en condiciones de afirmar que la corriente que pasa por el cable que alimenta la lámpara, es estacionaria. Esto es, que no varía con el tiempo (a menos durante un buen rato). Dos conclusiones:

1. No todo sistema de cargas alcanza el equilibrio electrostático.

2. Las corrientes estacionarias existen.

Examinemos algunos antecedentes prehistóricos donde se producían corrientes estacionarias[6]. No resultará extraño al lector, imaginar que cierto río de montaña mantenía un fluir uniforme durante una tarde de primavera, ante los ojos de un habitante primitivo. Este habitante (probablemente sin cuestionárselo) era testigo de una corriente estacionaria (claro que de agua). Algunos miles de años después, y con la abstracción bien entrenada podemos imaginarnos que el agua de ese río, fue después lago, luego mar, más tarde vapor y nube, probablemente nieve o hielo para luego volver a ser río de montaña. El agua cumplió un ciclo, o bien siguió un **circuito**. Si ahora observamos el circuito con sumo cuidado, podemos decir que mientras la nieve caía o el río bajaba, no hacían más que dejarse llevar por la gravedad que, a riesgo de romper el clima, debemos recordar que es una fuerza conservativa. Como siempre, ella quiere que todo vaya hacia la mínima energía potencial. Pero lo raro está en la parte en que el agua sube. En este tramo la cosa es al revés. Mientras la gravedad tira para abajo, el agua viaja para arriba. ¡Y es tan cotidiano...! Aquí estamos frente al sistema de bombeo que nos mantiene vivos. La energía la aporta generosamente el Sol (nótese que aún no ha sido arancelado, al menos en forma directa). El mecanismo es la evaporación del agua de los mares, ríos, lagos, lagunas, charcos o simplemente, ropa tendida. Este mecanismo, en apariencia perpetuo, podría decirse que esconde una *fuerza acuomotriz*, y que la misma opera por incorporación de *energía solar*.

Ahora que sabemos quién aporta la energía, y también sabemos quién la *transporta*, nos falta saber ¿quién se la queda? la respuesta es bien simple. Mientras el agua baja, en todos los procesos hay fuerzas disipativas. Algunas muy evidentes como la viscosidad. Otras no tanto, como la radiación o el sonido. Otras más indirectas aún, como los cantorrodados arrastrados por la corriente que se depositarán en un remanso. Pero en todos los casos la energía mecánica será convertida en *otra clase* de energía, que no quedará alojada en el sistema (a menos de tiempos relativamente cortos). En general diremos que la misma es transferida al entorno del sistema (en este caso el planeta ¿o el Universo?...).

La tecnología suele ser una combinación ingeniosa de fenómenos naturales, adaptados a las necesidades de la *naturaleza humana*. Ahora que todo está listo,

[6] Digo prehistóricos para que se entienda que la Naturaleza aportó los ejemplos sin necesidad de involucrar al hombre es su proyecto.

es fácil imaginarlo. Si queremos una corriente eléctrica estacionaria, necesitamos una *fuerza electromotriz* ¿que funcione a energía solar? No nos apresuremos (quizá sí...). Por de pronto quedémonos con la fuerza electromotriz, definida a partir de su utilidad. ¿Para qué sirve? Para que las cargas eléctricas que se encuentran en un campo conservativo, adquieran nuevamente energía potencial cada vez que la pierdan, y así seguir tomando parte en un proceso dinámico continuo.

7.7. Fuentes de fuerza electromotriz

La producción de fuerza electromotriz, f.e.m, ha dado lugar a importantísimos desarrollos tecnológicos. Podemos agruparlos en dos grandes líneas

Generadores electromecánicos: dínamos y alternadores.

Generadores electroquímicos: pilas y baterías.

Por supuesto que esta clasificación no agota la diversidad de mecanismos que producen fuerza electromotriz, pero contiene los ejemplos más habituales. Nosotros no discutirenos aquí los principios de funcionamiento. Simplemente introducimos el concepto como recurso para sostener corrientes estacionarias en circuitos eléctricos. Una mirada *idealizada* acerca de un generador, nos permitiría definirlo como sigue: Un **generador** es un dispositivo que garantiza una diferencia de potencial especificada[7]. Esta diferencia de potencial puede ser constante, o variar en el tiempo como una función previamente conocida. En este curso trataremos con dos clases de generadores: las baterías como fuentes de f.e.m. constante, y las fuentes de f.e.m. alterna, cuyas funciones del tiempo son de la forma

$$\epsilon\,(t) \;=\; \epsilon_0\;\cos\,(\omega t) \tag{7.9}$$

donde $\epsilon(t)$ representa la f.e.m. alterna, ϵ_0 es su amplitud y ω su frecuencia angular.

[7]Esta idealización puede resultar grotesca (o tal vez hasta ofensiva) para las legiones de ingenieros que desarrollaron durante dos siglos la tecnología que hoy disfrutamos. Entonces quisiera expresar mi más absoluta admiración por tan basto desarrollo, y a la vez aclarar que la física es así. Si los fenómenos fueran abordados con su real complejidad, probablemente el método de la física no hubiera servido.

7.8. Corrientes en medios conductores

Ahora nos disponemos a estudiar un caso particular de circulación de corriente, que merece una atención especial por su importancia tecnológica. Es el caso de los conductores metálicos, cuyo modelo básico recordaremos a continuación.

Según hemos visto, un conductor puede modelarse como una colección más o menos ordenada de iones positivos fijos, y un gas de electrones de conducción que deambulan libremente dentro del volumen del cuerpo. En condiciones normales, el metal es estadísticamente neutro. Para fijar ideas, supongamos que nuestro conductor es un macizo cilíndrico de radio R, longitud l y n electrones de conducción por unidad de volumen (magnitud esta, que dependerá del material y sus detalles de agregación). Supongamos ahora que este conductor es sometido a una diferencia de potencial V entre sus extremos, de modo que un campo eléctrico $\vec{E}$ se origina en su interior. Por simplicidad imaginemos que las líneas de campo son rectas paralelas al eje del cilindro. Supongamos además, que la diferencia de potencial es sostenida por una batería, que retira electrones por un extremo del conductor y los reinserta por el otro extremo con su energía potencial restituida.

Ahora nos preguntamos ¿cómo viajan los electrones por el conductor? Nada menos placentero que viajar como electrones en un conductor[8]. Los electrones se aceleran bajo la influencia del campo eléctrico, pero cuando adquieren algo de velocidad, chocan con los iones de la red del conductor. En el choque intercambian energía (como se pueda) y salen dispersados (para donde se pueda). Y todo vuelve a empezar. Otra aceleración, y otro choque, y así siempre...

Observemos dos detalles importantes:

1. La energía que el campo eléctrico le aporta al electrón, este se la transfiere a la red de iones. Por tanto la velocidad del electrón, en promedio, no progresa.

2. La energía transferida a los iones contribuye escencialmente a aumentar las amplitudes de sus vibraciones en la red, que dicho de otra manera, significa que aumentará la energía térmica del conductor.

7.9. Ley de Ohm

Para muchos conductores de uso frecuente en la tecnología, es posible modelar la transferencia energética entre los electrones de conducción y los iones de la red, como el resultado de la existencia de una fuerza viscosa. Esto es, una

[8] Para hacerse una imagen, es aún peor que viajar en trenes suburbanos en hora pico.

fuerza disipativa proporcional a la velocidad, que se opone al desplazamiento. En nuestro modelo microscópico, es posible imaginar una velocidad promedio de los electrones en dirección del campo eléctrico y en sentido contrario al mismo. En tal sentido, podemos pensar que cada electrón viaja por el conductor de modo que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es nula. En otras palabras, la fuerza eléctrica y la fuerza disipativa son de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario[9]. Sea $\vec{F}_d$ la fuerza disipativa proporcional a la velocidad y de sentido opuesto a la misma. Esto es

$$\vec{F}_d \; = \; -\alpha\vec{v} \tag{7.10}$$

donde α es una constante característica del medio. Para el caso de corriente de electrones, la densidad de corriente toma la forma

$$\vec{J} \; = \; -ne\vec{v} \tag{7.11}$$

con lo que se tiene que

$$\vec{F}_d \; = \; -\alpha\left(-\frac{\vec{J}}{ne}\right) \; = \; \left(\frac{\alpha}{ne}\right)\,\vec{J} \tag{7.12}$$

Recordando que en régimen estacionario, la fuerza eléctrica y la disipativa suman cero, tenemos

$$\vec{F}_e + \vec{F}_d \; = \; 0 \qquad -e\vec{E} \; + \; \left(\frac{\alpha}{ne}\right)\,\vec{J} \; = \; 0 \tag{7.13}$$

con lo que se obtiene la relación

$$\vec{J} \; = + \; \left(\frac{ne^2}{\alpha}\right)\,\vec{E} \tag{7.14}$$

Nótese que la expresión entre paréntesis está formada por constantes características del conductor. Todas ellas pueden compactarse en una única magnitud σ a la que llamaremos **conductividad del material**. Entonces concluimos que

[9]Para imaginarse esto, el lector puede recurrir al ejemplo de un paracaidista. El mismo está afectado por la fueza gravitatoria y la fuerza viscosa que el aire ejerce sobre su paracaidas. La suma de ambas es nula, y por tanto el paracaidista baja a velocidad constante.

$$\vec{J} \;=\; \sigma\,\vec{E} \tag{7.15}$$

A este resultado se lo conoce como **ley de Ohm**. Muchas veces se dice que esta forma de la ley de Ohm constituye su versión microscópica. Sin embargo, tal denominación no es correcta, ya que tanto la densidad de corriente $\vec{J}$ como la conductividad σ son magnitudes definidas en el mundo macroscópico. En todo caso, la denominación correcta será *forma local de la ley de Ohm*, para diferenciarla de una forma operativa muy difundida en aplicaciones tecnológicas, que desarrollaremos en la próxima sección.

Es importante resaltar que la ley de Ohm, tal como la hemos presentado, proviene de un modelo, y como tal no es esperable que todos los materiales conductores le respondan favorablemente. Los que sí lo hacen reciben el nombre de **conductores óhmicos**.

7.10. Resistividad y resistencia

Ahora veremos qué consecuencia global tiene la ley de Ohm, cuando se analiza un cierto volumen de conductor óhmico sometido a un campo eléctrico conocido. Para fijar ideas, consideremos un cilindro macizo de longitud l y área a, sobre el que se sostiene un campo eléctrico uniforme longitudinal $\vec{E}$. Supongamos que $\vec{E}$ apunta hacia la derecha, y elegimos la referencia de potencial en el extremo derecho del cilindro. Entonces el potencial en el extremo izquierdo puede calcularse por integración sobre la curva C, elegida coincidente con el eje del cilindro. Esto es

$$V \;=\; -\int_{C\;\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot\vec{dl} \;=\; -\int_0^l E\breve{\imath}\cdot(-dx\,\breve{\imath}) \;=\; El \tag{7.16}$$

Por otra parte, la corriente total a través de una sección del cilindro puede tratarse mediante la ley de Ohm local, como sigue

$$I \;=\; \int_S \vec{J}\cdot\vec{ds} \;=\; \int_S \sigma\vec{E}\cdot\vec{ds} \;=\; \int_S \sigma E\breve{\imath}\cdot ds\breve{\imath} \;=\; \sigma E\int_S ds \;=\; \sigma Ea \tag{7.17}$$

Combinando los resultados (7.16) y (7.17) tenemos

$$I \;=\; \sigma E a \;=\; \sigma a \frac{V}{l} \tag{7.18}$$

Es costumbre en usos tecnológicos, definir una magnitud característica de cada material, llamada **resistividad**, a la que se la denota por ρ. La misma se define como la inversa de la conductividad. Esto es

$$\rho \;=\; \frac{1}{\sigma} \tag{7.19}$$

Con esta definición, (7.18) puede reescribirse como sigue

$$I \;=\; \left(\frac{a}{\rho l}\right) V \qquad \text{o bien} \qquad V \;=\; I \left(\frac{\rho l}{a}\right) \tag{7.20}$$

Al factor entre paréntesis se lo denomina **resistencia eléctrica** del objeto, y lo denotaremos con R:

$$R \;=\; \frac{\rho\, l}{a} \tag{7.21}$$

Nótese que esta magnitud representa una propiedad del cuerpo conductor, que involucra su geometría y su composición. La expresión (7.21) es específica para objetos cilíndricos (por ejemplo alambres), de modo que en casos de geometrías distintas debe ser recalculada.

Volvamos ahora a la expresión (7.20). Ella provee una forma operativa de la ley de Ohm

$$V \;=\; IR \tag{7.22}$$

Esta expresión, como habiamos anticipado, es ampliamente difundida en el mundo de los cálculos de aplicación tecnológica. Aunque la expresión fue deducida para un caso particular, su forma es de carácter general, ya que las diferencias se manifiestan en la forma particular que se derive para la resistencia. En otras palabras, *la ley de Ohm describe la proporcionalidad entre la corriente que circula por un conductor, y la diferencia de potencial que le da origen.*

Muchas aplicaciones tecnológicas requieren dispositivos con resistencia especificada, a los que se los llama **resistores**. Pero la resistencia también aparece en los conductores que forman las redes de distribución eléctrica (cables), o den-

tro de las pilas. Por tanto, un proyecto real no puede dejar de tener en cuenta los efectos surgidos de la resistencia de los distintos medios por los que circula corriente. La unidad de resistencia es el **Ohm** o **Ohmio**, y se la representa por Ω. Su relación con las unidades previas es

$$\Omega \;=\; \frac{\mathsf{V}}{\mathsf{A}} \;=\; \frac{\mathsf{J\,s}}{\mathsf{C}^2} \;=\; \frac{\mathsf{s}}{\mathsf{F}} \tag{7.23}$$

7.11. Efecto Joule

Como el modelo propuesto responde razonablemente bien para describir la dinámica del tránsito de cargas a través de un conductor, nos vemos alentados a explorar sus predicciones en el terreno energético. Ya que la fuerza viscosa es de tipo “no conservativa", el trabajo que ella realiza sobre las cargas coincide con el cambio de energía mecánica que experimentan dichas cargas. Volvamos al caso del conductor cilíndrico de la sección 7.10. Dentro del tramo de conductor considerado, la carga libre existente al iniciar el análisis (carga total de los electrones de conducción), viene dada por

$$Q \;=\; -n\,e\,a\,l \tag{7.24}$$

Pasado un tiempo Δt, todos los electrones habrán recorrido una distancia l a velocidad constante $\vec{v}$ hacia la izquierda, ocupando ahora un volumen igual al inicial en un tramo contiguo del conductor. El trabajo realizado sobre cada electrón por la fuerza viscosa, es opuesto al realizado por el campo. Esto es

$$w_{\vec{F}_v} \;=\; -w_{\vec{F}_e} \;=\; -\int_1^2 \,(-e)\,\vec{E}\cdot\vec{dl} \tag{7.25}$$

Veamos con detalle cada factor del integrando

$$\vec{E} \;=\; E\,\breve{i} \qquad \vec{dl} \;=\; -dx'\,\breve{i} \tag{7.26}$$

con lo que tenemos

$$w_{\vec{F}_v} \;=\; -\int_x^{l+x} \,(-e)\;E\,\breve{i}\cdot(-dx'\,\breve{i}) \;=\; -e\,l\,E \tag{7.27}$$

Como todos los electrones recorren el mismo camino bajo la acción de las mismas fuerzas, el trabajo total de la fuerza viscosa será

$$W_{\vec{F}_v} \;=\; n\,a\,l\,w_{\vec{F}_v} \;=\; -e\,n\,a\,l^2 E \tag{7.28}$$

Recordemos ahora el análisis de la sección 7.10, donde habíamos obtenido que

$$V \;=\; El \;=\; IR \tag{7.29}$$

y además observemos que

$$I \;=\; \frac{n\,e\,a\,l}{\Delta t} \tag{7.30}$$

(reflexione cuidadosamente sobre el signo). Entonces, reemplazando (7.29) y (7.30) en (7.28), tenemos

$$W_{\vec{F}_v} \;=\; -I^2 R\,\Delta t \tag{7.31}$$

Entonces la potencia $P_{\vec{F}_v}$ asociada la disipación será

$$P_{\vec{F}_v} \;=\; \frac{W_{\vec{F}_v}}{\Delta t} \;=\; -I^2 R \tag{7.32}$$

Reconstruyamos brevemente el significado de esta potencia. Los electrones son acelerados por el campo eléctrico, de modo que la energía potencial eléctrica conferida a los electrones por una fuente de fuerza electromotriz (pila), se convierte en energía cinética. Luego los electrones chocan con los iones de la red fija, cediéndoles energía en cada colisión. La misma pasa a formar parte de la energía interna del material y puede abandonar el conductor por los mecanismos usuales (transmisión, convección o radiación). A la secuencia que acabamos de describir se la conoce como **efecto Joule**.

Observemos ahora el signo menos de la relación (7.32). El mismo se debe a que, desde el punto de vista mecánico, el sistema ha perdido energía. En general diremos que la potencia P_R disipada por el resistor será

$$P_R \;=\; I^2 R \tag{7.33}$$

Capítulo 8
Magnetostática

8.1. Una mirada sobre la historia

El término **magnetismo** evoca la antigua ciudad tesalonicense de Magnesia, en la mesopotamia asiática. Según registros provenientes de la Grecia antigua, en la citada ciudad se conocían rocas, cuyas extrañas propiedades eran semejantes a las de los imanes actuales. Lo extraño era que tales propiedades eran *naturales* en estas rocas. Este parece ser el inicio histórico del conocimiento acerca del magnetismo. Tales de Mileto y, probablemente, Sócrates se ocuparon del tema, y elaboraron algunas especulaciones (por supuesto a la manera griega[1]).

Por su parte, los chinos también conocieron esta fenomenología. A ellos se les atribuye la primera observación del magnetismo terrestre, y su conexión con la orientación de objetos magnéticos. Tanto en Grecia como en China, parece que este conocimiento fue adquirido algunos siglos antes de Cristo.

El primer objeto verdaderamente trascendental que aportó el magnetismo, fue la "brújula". Bastará evaluar el cambio operado en la navegación a partir de su implementación, para estimar su importancia. Tal vez, podríamos situar el nacimiento de la brújula como un hito histórico, en el que se sintetiza el valor de las conexiones surgidas de la observación cuidadosa de hechos naturales. Esto no es trivial; y cuanto más conocimiento haya sobre los fenómenos físicos, más se amplía el horizonte de tales conexiones. *Pero hay que descubrirlas*.

Retomemos el hilo de la historia. El estado actual de conocimiento sobre el magnetismo, revela que la ventana que se abrió en Magnesia, dejaba ver muy

[1] No quisiera que el lector tome esta aclaración en un sentido que induzca a la desvalorización del pensamiento antiguo. En tal caso, léase que los griegos vivieron mucho antes de los inicios de la ciencia moderna, por lo que sus formas de concebir la naturaleza estaba muy lejos de nuestro modo de pensar. Creo oportuno enfatizar aquí, que el pensamiento científico "debe" nutrirse de todas las vertientes, cosa que afortunadamente ha ocurrido con el legado de la Grecia antigua.

poco de lo que habría dentro del vasto laberinto. Es cierto también que las ventanas que se abren serán siempre un buen augurio, pero en este caso no se pudo ver, sino hasta dos mil años después, el segundo capítulo de la historia. ¿Casualidad o no?, no lo sabremos. Pero un día en que los tránsitos de corriente eléctrica a través de conductores ya eran frecuentes, ocurrieron simultáneamente dos cosas: la primera fue que una brújula yacía cerca de un conductor, en el preciso momento en que cirlulaba por él una corriente; la segunda fue que alguien con capacidad de asombro y discernimiento, lo observó. Aquí surgió la clave de la concepción actual del magnetismo. Los trabajos de H. C. Oersted en 1820 establecieron la conexión entre fenónemos eléctricos y magnéticos, y desde entonces comenzó a vislumbrarse la posibilidad de una teoría unificada que vinculara ambas interacciones. En la década de 1860 se alcanzó la unificación en lo que se dio en llamar **teoría electromagnética clásica**, de la cual nos ocuparemos más adelante.

8.2. Corriente eléctrica y campo de inducción magnética

La concepción actual acerca del magnetismo consiste en que tal interacción se dará entre dos partículas dotadas de carga eléctrica, cuando cada una de ellas se encuentre en movimiento. En tal sentido, diremos que las partículas involucradas interactúan mediante dos mecanismos que dan lugar a fuerzas bien diferenciables: la eléctrica y la magnética.

Puede que al lector le resulte algo extraño que la interacción magnética dependa del movimiento, especialmente pensando en el carácter relativo de este último. Si esto es así, resultará que ciertos observadores notarán la interacción magnética (los que ven moverse ambas partículas), mientras que otros observadores no notarán la interacción (los que ven al menos una de las partículas en reposo). La verdad es que suena raro. Pero las evidencias mandan, y se han requerido mentes brillantes (y especialmente abiertas) para construir un marco teórico que respalde esta rareza (y otras tantas). La teoría moderna de la relatividad, que viera la luz hacia 1905 a partir de los trabajos de A. Einstein, tuvo entre sus objetivos originales, la misión de dar sustento “mecánico" a las extrañas conclusiones que surgían del electromagnetismo.

De la misma manera que la interacción eléctrica, la interacción magnética puede ser tratada como un campo. En efecto, puede definirse un **campo de inducción magnética** que, en general, dependerá de la posición y del tiempo. Sus fuentes serán las cargas en movimiento, ya sea individualmente o en la forma colectiva habitual de corrientes eléctricas. ¿Sobre qué se hará notar? Sobre otras

cargas en movimiento (o corrientes). *El campo de inducción magnética es una propiedad acechante, que habita en el espacio esperando que partículas viajeras pasen bajo su influencia.*

8.3. Magnetostática. Ley de Biot-Savart

La magnetostática constituye el estudio de las interacciones magnéticas, que pueden ser representadas por campos de inducción magnética independientes del tiempo. Esto solo puede darse cuando las fuentes del campo son **corrientes estacionarias**. Esto es, corrientes que no dependen del tiempo. Los campos que pueden encuadrarse en este requerimiento son los que surgen de la ley de Biot-Savart, que enunciamos a continuación.

Consideremos una región del espacio en que existe una distribución de corriente estacionaria, cuya densidad volumétrica es $\vec{J}(\vec{r'})$. Supongamos que la misma da origen a un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ que ocupa la misma región. Entonces, el elemento de corriente que ocupa el volumen infinitesimal dv situado en $\vec{r'}$, contribuye con un aporte $d\vec{B}$ al campo de inducción magnética en el punto $\vec{r}$ dado por

$$d\vec{B}(\vec{r}) \ = \ k' \ \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid^2} \ \times \ \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \ dv \tag{8.1}$$

donde la constante k' en el sistema MKS vale

$$k' \ = \ 10^{-7} \ \frac{\text{T m}}{\text{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \tag{8.2}$$

La constante μ_0 se conoce como **permeabilidad magnética del vacío**. Esta es la forma diferencial de la ley de Biot-Savart, que admite ser integrada directamente por aplicación del Principio de Superposición. Así tendremos

$$\vec{B}(\vec{r}) \ = \ k' \ \int_D \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid^2} \ \times \ \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \ dv \tag{8.3}$$

donde D representa el dominio donde hay corrientes (ver Figura 8.1).

Expresión de bolsillo: Una forma de recordar la ley de Biot-Savart consiste en definir un vector $\vec{u}$ como sigue

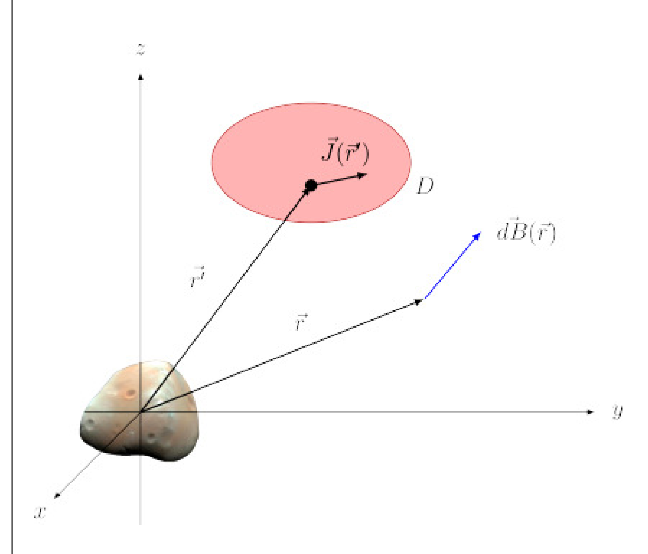


Figura 8.1: Esquema de los vectores involucrados en la descripción matemática del campo de inducción magnética originado por una distribución de corrientes en el dominio D.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{r} - \vec{r'} \\ u &= \mid \vec{r} - \vec{r'} \mid \end{aligned} \qquad \breve{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \tag{8.4}$$

con lo que obtenemos

$$\vec{B}(\vec{r}) = k' \int_D \frac{\vec{J} \times \breve{u}}{u^2} \, dv \tag{8.5}$$

Nunca será suficiente insistir en que esta expresión *no es* la ley de Biot-Savart, sino un ayuda memoria para *construir* la expresión correcta.

8.4. Circuitos como fuentes de campo de inducción magnética

Muchas veces el campo de inducción magnética se origina por la circulación de corriente estacionaria en un circuito. Supongamos que el conductor que forma el circuito es suficientemente delgado, comparado con las dimensiones generales del circuito, y que no resulta de interés el campo de inducción magnética “dentro" del conductor. Entonces podemos modelar la distribución de fuentes como una curva sobre la que circula una corriente única. Sea C una curva cerrada que representa la forma del circuito, y sea I la corriente que circula por el circuito.

Entonces la ley de Biot-Savart toma la forma simplificada siguiente

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; k' \int_C \frac{I\vec{dl}(\vec{r'})}{\mid \vec{r}-\vec{r'}\mid^2} \;\times\; \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{\mid \vec{r}-\vec{r'}\mid} \tag{8.6}$$

donde $\vec{dl}$ es un elemento infinitesimal de la curva C, orientado en el sentido en que circula la corriente.

8.5. Ejemplo 1: Hilo recto de longitud finita

El lector podrá preguntarse, ¿cómo es posible que exista este tipo de fuentes? Y la pregunta es muy razonable, dado que no podrá establecerse una corriente estacionaria en tal sistema. Sin embargo, el Principio de Superposición nos permite analizar los circuitos “por partes", y luego sumar los resultados. Por ejemplo, una espira cuadrada genera un campo de inducción magnética $\vec{B}$ que puede estudiarse como la suma de cuatro contribuciones del tipo “hilo recto de longitud finita".

La geometría del problema sugiere el uso de coordenadas cilíndricas ρ, ϕ y z. En la Figura 8.2 se visualiza la disposición de estas coordenadas, y se ha elegido, además, que el plano del papel contenga al hilo y al punto donde queremos calcular el campo de inducción magnética (observe que esto no le resta generalidad al análisis).

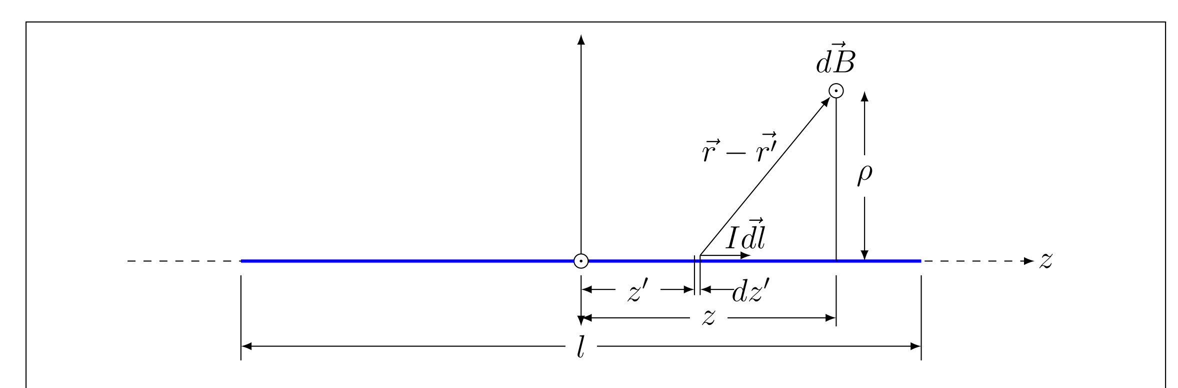


Figura 8.2: Esquema de los elementos geométricos involucrados en el cálculo del campo de inducción magnética $\vec{B}$, producido por un hilo recto de longitud l por el que circula una corriente constante I.

El origen de coordenadas fue elegido en el punto medio del hilo. Luego indicamos en la Figura 8.2 un elemento de corriente $I\vec{dl}$ y su contribución al campo $d\vec{B}$ (por

simplificar el dibujo, hemos omitido los vectores $\vec{r}$ y $\vec{r}'$, que el lector podrá situar fácilmente). La ley de Biot-Savart nos da la siguiente relación diferencial

$$d\vec{B}\,(\vec{r}) \;=\; k'\,\frac{I\vec{dl}\,(\vec{r}')}{|\,\vec{r}-\vec{r}'\,|^2}\;\times\;\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\,\vec{r}-\vec{r}'\,|} \tag{8.7}$$

Tanto el vector $\vec{dl}(\vec{r}')$ como el $\vec{r}-\vec{r}'$ están contenidos en el plano del dibujo. Por tanto, la contribución $d\vec{B}(\vec{r})$ será perpendicular a dicho plano. Como esto se repite para todos los elementos de corriente, concluimos que el campo de inducción magnética integrado $\vec{B}(\vec{r})$ tiene dirección perpendicular al plano del dibujo. Por otra parte, el campo es insensible a rotaciones alrededor del eje z, por lo que cabe interpretar que solo tiene componente azimutal, y que la misma no depende de la coordenada ϕ. Entonces

$$B_\rho \;=\; B_z \;=\; 0 \qquad B_\phi \;=\; B_\phi\,(\rho, z) \tag{8.8}$$

Esta última conclusión nos indica que solo debemos calcular la componente B_ϕ. Para ello, reconozcamos que

$$\vec{dl} \;=\; dz'\,\breve{k} \tag{8.9}$$

y utilizando las formas simplificatorias (8.4) tenemos

$$dB_\phi\,(\vec{r}) \;=\; k'I\,\frac{|\vec{dl}\times\breve{u}|}{u^2} \tag{8.10}$$

Sea β el ángulo entre los vectores $\vec{dl}$ y $\vec{u}$, entonces tenemos

$$B_\phi\,(\vec{r}) \;=\; k'I\,\int_C \frac{|\vec{dl}\times\breve{u}|}{u^2} \;=\; k'I\,\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\sin(\beta)\;dz'}{u^2} \tag{8.11}$$

que explícitamente toma la forma

$$B_\phi\,(\vec{r}) = k'I\,\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\rho\,dz'}{\left[\,\rho^2+(z-z')^2\,\right]^{3/2}} = \frac{k'I}{\rho^2}\,\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dz'}{\left[\,1+\left(\frac{z-z'}{\rho}\right)^2\,\right]^{3/2}} \tag{8.12}$$

Esta integral puede resolverse mediante la siguiente sustitución trigonométrica

$$\frac{z - z'}{\rho} \; = \; \tan(w) \qquad \rightarrow \qquad -\frac{dz'}{\rho} \; = \; \frac{dw}{\cos^2(w)} \tag{8.13}$$

con lo que la integral toma la forma

$$B_\phi\,(\vec{r}) \; = \; -\frac{k'I}{\rho} \int_{w_1}^{w_2} \frac{dw}{[\;1 + \tan^2(w)]^{3/2}\;\; \cos^2(w)} \tag{8.14}$$

Utilizando identidades trigonométricas tenemos

$$1 + \tan^2(w) \; = \; 1 + \frac{\sin^2(w)}{\cos^2(w)} \; = \; \frac{\cos^2(w) + \sin^2(w)}{\cos^2(w)} \; = \; \frac{1}{\cos^2(w)} \tag{8.15}$$

Reemplazando, podemos resolver la integral

$$B_\phi\,(\vec{r}) \; = \; -\frac{k'I}{\rho} \int_{w_1}^{w_2} \cos(w)\; dw \; = \; -\frac{k'I}{\rho}\;\; [\sin(w_2) - \sin(w_1)] \tag{8.16}$$

Ahora recordamos una identidad trigonométrica no tan conocida (aunque ya la habíamos usado algún tiempo atrás)

$$\sin(w) \; = \; \frac{\tan(w)}{\sqrt{1 + \tan^2(w)}} \tag{8.17}$$

Utilizándola tenemos

$$\sin(w) \; = \; \frac{\dfrac{z - z'}{\rho}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{z - z'}{\rho}\right)^2}} \; = \; \frac{z - z'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \tag{8.18}$$

con lo que el resultado final toma la forma

$$B_\phi\left(\rho,z\right) \;=\; \frac{k'I}{\rho}\;\left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{\rho^2+\left(z+\frac{l}{2}\right)^2}}\;-\;\frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{\rho^2+\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}}\right] \tag{8.19}$$

Este resultado pone de manifiesto un problema habitual inherente al uso de coordenadas cilíndricas o esféricas. La componente B_ϕ se indetermina cuando ρ tiende a cero[2]. Analicemos este límite, modificando adecuadamente la expresión. (8.19).

$$B_\phi\left(\rho,z\right) \;=\; \frac{k'I}{\rho}\left[\frac{sgn\left(z+\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{z+\frac{l}{2}}\right)^2}}\;-\;\frac{sgn\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{z-\frac{l}{2}}\right)^2}}\right] \tag{8.20}$$

Con excepción de los extremos del hilo, siempre es posible acercarse al eje z lo suficiente para que valgan las siguientes aproximaciones

$$\frac{\rho}{z+\frac{l}{2}} \;<<\; 1 \qquad\qquad \frac{\rho}{z-\frac{l}{2}} \;<<\; 1 \tag{8.21}$$

Reemplazando en (8.20) y desarrollando cada término a primer orden en serie de Taylor alrededor de $\rho = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} B_\phi\left(\rho,z\right) \;=\; \frac{k'I}{\rho}&\left[sgn\left(z+\frac{l}{2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{2\left(z+\frac{l}{2}\right)^2}\right)\right. \\ &\left. -\; sgn\left(z-\frac{l}{2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{2\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{8.22}$$

Aquí conviene definir la función $f(z)$ dada por

$$f\left(z\right) \;=\; -\frac{sgn\left(z+\frac{l}{2}\right)}{2\left(z+\frac{l}{2}\right)^2} \;+\; \frac{sgn\left(z-\frac{l}{2}\right)}{2\left(z-\frac{l}{2}\right)^2} \tag{8.23}$$

[2]Esto mismo puede ocurrir en otros campos con la componente radial.

Esta función se indetermina en $z = -l/2$ y en $z = l/2$, por lo que excluimos dichos puntos de su dominio. Entonces la componente B_ϕ próxima al eje z puede reescribirse en forma compacta como sigue

$$B_\phi(\rho, z) = \begin{cases} \dfrac{k' I}{\rho} \left[2 + \rho^2 f(z) \right] & \text{si } -\dfrac{l}{2} < z < \dfrac{l}{2} \\ \\ k' I \rho f(z) & \text{si } z < -\dfrac{l}{2} \text{ ó } \dfrac{l}{2} < z \end{cases} \tag{8.24}$$

Ahora estamos en condiciones de evaluar el límite para ρ tendiendo a cero

$$\lim_{\rho \to 0} B_\phi(\rho, z) = \begin{cases} \to \infty & \text{si } -\dfrac{l}{2} < z < \dfrac{l}{2} \\ \\ 0 & \text{si } z < -\dfrac{l}{2} \text{ ó } \dfrac{l}{2} < z \end{cases} \tag{8.25}$$

Este resultado permite observar algunas cuestiones físicamente interesantes. En primer lugar, permite visualizar que sobre la recta que contiene al hilo, no aparecen influencias magnéticas (note que esta conclusión hubiera sido más directa por simple observación de la ley de Biot-Savart). Por otra parte, el campo de inducción magnética $\vec{B}$ se indetermina sobre el hilo. Este resultado es claramente *no físico* y podemos atribuirlo al *modelo*, que parte de suponer que un hilo puede tener radio nulo[3].

8.6. Ejemplo 2: Hilo recto infinito

El resultado obtenido en (8.19), o su forma modificada (8.20), pueden ser fácilmente extendidos al caso de un hilo infinitamente largo. Para ello, bastará hacer el límite para l tendiendo a infinito. Esto es

[3]Este resultado se repite en todos los casos en que la distribución de corriente se modela como una curva. Sin embargo, en general no será fácil de visualizar matemáticamente excepto en el caso de segmentos rectos.

$$B_\phi(\rho, z) \;=\; \lim_{l\to\infty} \frac{k'I}{\rho}\left[\frac{sgn\left(z+\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{z+\frac{l}{2}}\right)^2}} - \frac{sgn\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{z-\frac{l}{2}}\right)^2}}\right] \tag{8.26}$$

Observando que para todo z finito, las funciones signo tienden respectivamente a 1 y -1, concluimos que el corchete tiende a 2. Entonces tenemos

$$B_\phi(\rho) \;=\; \frac{2k'I}{\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{B}(\rho) \;=\; \frac{2k'I}{\rho}\breve{\phi} \tag{8.27}$$

Nótese en este resultado que desapareció la dependencia con la coordenada z (como el estudiante seguramente habrá previsto, al investigar la simetría).

8.7. Ejemplo 3: Espira circular (Campo en el eje)

Una espira es un anillo de alambre (conductor), cuyo radio R es mucho mayor que el diámetro de la sección transversal del alambre. Supongamos que por la espira circula una corriente estacionaria I. Buscaremos ahora el campo de inducción magnética $\vec{B}$ en un punto del eje de simetría de la espira. Para ello, situamos el origen de coordenadas en el centro de la espira, y orientamos el eje z a lo largo del eje. Entonces el punto campo será $\vec{r} = (0, 0, z)$. Argumentos de simetría permiten reconocer que las componentes del campo $\vec{B}$ perpendiculares al eje z son nulas .

$$B_x\ (\ 0, 0, z\ ) \;=\; B_y\ (\ 0, 0, z\ ) \;=\; 0 \tag{8.28}$$

Este es un problema que admite varios caminos para su resolución. Aquí no elegimos el más simple o directo, sino el que nos enseña un poco del manejo formal de vectores. Comencemos por identificar los vectores requeridos en la ley de Biot-Savart. Para fijar ideas, supongamos que la corriente circula en sentido antihorario cuando miramos la espira desde un punto situado en el semieje positivo de z. Entonces resulta

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (0,0,z) \\
\vec{r'} &= (R\cos(\theta'), R\sin(\theta'), 0) \\
\vec{r}-\vec{r'} &= (-R\cos(\theta'), -R\sin(\theta'), z) \\
|\vec{r}-\vec{r'}| &= \sqrt{R^2+z^2} \\
\vec{dl} &= (-R\sin(\theta')d\theta', R\cos(\theta')d\theta', 0)
\end{aligned} \tag{8.29}$$

Una versión levemente modificada de la ley de Biot-Savart escrita en la componente z, viene dada por

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; k'I \int_C \frac{\left[\vec{dl}(\vec{r'}) \times (\,\vec{r}-\vec{r'}\,)\right]_z}{|\,\vec{r}-\vec{r'}\,|^3} \tag{8.30}$$

Analicemos el producto vectorial

$$\left[\,\vec{dl} \times (\,\vec{r}-\vec{r'}\,)\right]_z \;=\; \left|\begin{array}{ccc} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ -R\sin(\theta')d\theta' & R\cos(\theta')d\theta' & 0 \\ -R\cos(\theta') & -R\sin(\theta') & z \end{array}\right|_z \;=\; R^2 d\theta' \tag{8.31}$$

Reemplazando en la integral tenemos

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; k'I \int_0^{2\pi} \frac{R^2\;d\theta'}{(\,R^2+z^2\,)^{3/2}} \;=\; \frac{k'IR^2}{(\,R^2+z^2\,)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' \tag{8.32}$$

con lo que finalmente tenemos

$$\vec{B}\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k'IR^2}{(\,R^2+z^2\,)^{3/2}}\,\breve{k} \tag{8.33}$$

Insistimos en que este resultado puede obtenerse de formas más simples, por lo que sería muy provechoso que el estudiante intente otras variantes. Usted tendrá aquí la ventaja de saber de antemano el resultado. Pocas veces uno tiene este privilegio, por lo que la sugerencia es que no pierda la oportunidad de probar.

8.8. Ejemplo 4: Solenoide (Campo en el eje)

Un solenoide es un arrollamiento de espiras apretadas sobre un soporte cilíndrico. Este arrollamiento suele construirse con alambre de cobre, que posee un esmaltado como recurso de aislación. Gracias a dicho esmaltado, es posible poner las espiras en contacto mecánico, sin que ocurra el contacto eléctrico. El soporte cilíndrico puede omitirse en el modelo, salvo que sus propiedades magnéticas sean relevantes.

Ahora modelamos. Dado que conocemos el campo de inducción magnética producido por una única espira, es factible pensar al solenoide como una colección secuencial de N espiras de radio R, que forman una *superficie* cilíndrica de longitud l.

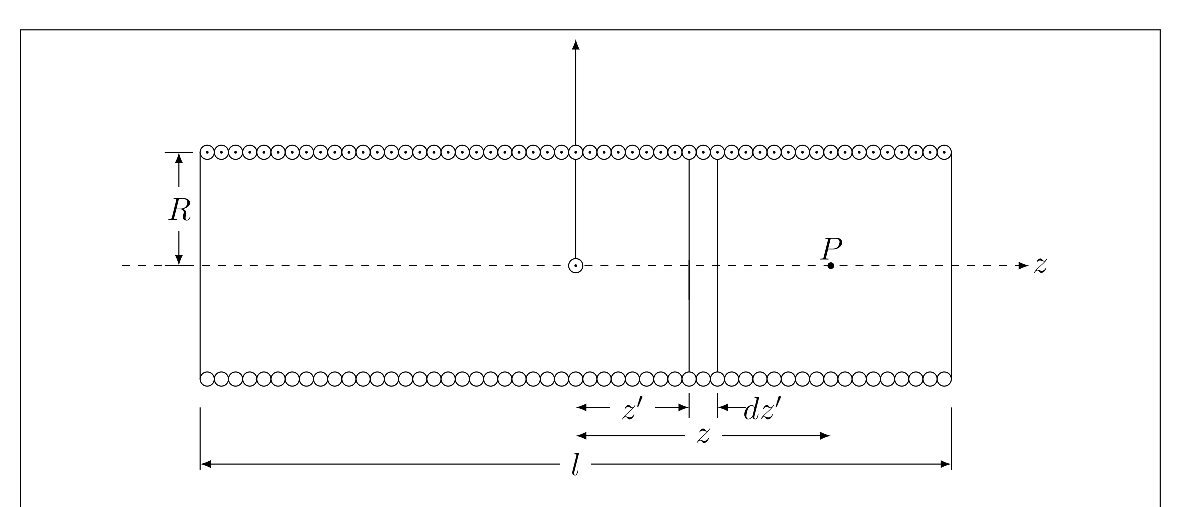


Figura 8.3: Esquema de los elementos geométricos utilizados para la determinación del campo de inducción magnética $\vec{B}$ en el eje de un solenoide de radio R y lingitud l.

Supongamos que el origen de coordenadas está exactamente en el centro del solenoide, y que el eje z corre a lo largo de su eje de simetría. Estamos interesados en determinar el campo de inducción magnética $\vec{B}$ en puntos del eje z, por lo que, sin pérdida de generalidad, nos referiremos al punto P (ver Figura 8.3)[4]. Como las espiras son *coaxiales*, la suma de sus contribuciones al campo de inducción magnética solo tendrá componente z. Esto es

$$B_x\ (0,0,z) = B_y\ (0,0,z) = 0 \tag{8.34}$$

Consideremos las espiras que se encuentran en el intervalo comprendido entre

[4]Aunque P ha sido elegido “dentro" del solenoide, el análisis que sigue es general.

z' y $z' + dz'$. Su contribución a la componente B_z en P será de la forma (8.33), aunque algo adaptada a la geometría del solenoide

$$dB_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k' R^2}{\left[\,R^2 + (z-z')^2\,\right]^{3/2}} \left(\frac{IN\,dz'}{l}\right) \tag{8.35}$$

donde la expresión entre paréntesis representa la parte proporcional de la corriente total del solenoide, que queda comprendida en el intervalo citado. El problema se resuelve integrando esta expresión. Así tenemos

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k' I N R^2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{\left[\,R^2 + (z-z')^2\,\right]^{3/2}} \tag{8.36}$$

o equivalentemente

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k' I N}{l R} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{\left[\,1 + \left(\frac{z-z'}{R}\right)^2\,\right]^{3/2}} \tag{8.37}$$

Esta integral es formalmente idéntica a la (8.12), Por lo que su resolución recorre el mismo camino desde la expresión (8.12) hasta la (8.19). La correspondiente sustitución será

$$\frac{z-z'}{R} \;=\; \tan(w) \qquad \rightarrow \qquad -\frac{dz'}{R} \;=\; \frac{dw}{\cos^2(w)} \tag{8.38}$$

siguiendo los mismos lineamientos, tenemos

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k' I N}{l} \left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z+\frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z-\frac{l}{2}\right)^2}} \right] \tag{8.39}$$

con lo cual se tiene inmediatamente

$$\vec{B}\,(\,0,0,z\,) \;=\; \frac{2\pi k' I N}{l} \left[\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z+\frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(z-\frac{l}{2}\right)^2}} \right] \breve{k} \tag{8.40}$$

8.9. Fuerza magnética

Hasta este punto nos ocupamos de la producción de campos de inducción magnética, a partir de corrientes estacionarias. Ahora abordaremos la descripción de los efectos que tienen lugar cuando estos campos influyen sobre partículas en movimiento. Comencemos por suponer que en cierta región del espacio existe un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ estacionario. Si en dicha región viaja una partícula de carga Q, con velocidad $\vec{v}$, el campo ejercerá una fuerza $\vec{F}$ sobre ella, dada por

$$\vec{F} \;=\; Q\vec{v} \times \vec{B} \tag{8.41}$$

Esta es la **fuerza magnética** o **fuerza de Lorentz**. Algunos detalles saltan a primera vista. Note que la fuerza es perpendicular a la velocidad, y por tanto, al desplazamiento. Inmediatamente se sigue que la fuerza magnética no puede realizar trabajo sobre las partículas que se mueven bajo su influencia. El teorema de trabajo y energía nos permite concluir que, si la partícula está exclusivamente afectada por fuerzas magnéticas, su energía cinética se mantendrá invariante. En otras palabras, las fuerzas magnéticas pueden alterar la dirección de la velocidad de la partícula, pero no su módulo.

Ahora centraremos la atención en el caso en que las partículas cargadas viajan por un conductor largo de pequeña sección, dando lugar a una corriente eléctrica. Aquí las interacciones microscópicas entre los electrones de conducción y los iones fijos de la red que forma el soporte sólido, hacen que la fuerza se manifieste directamente como un efecto macroscópico sobre el conductor. Supongamos nuevamente que un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ ha sido establecido en la región del espacio en la que yace un conductor por el que circula corriente I. Sea $\vec{dl}$ un elemento de la curva que describe el conductor, orientado en el sentido de circulación de la corriente. Entonces, la fuerza que *ejerce el campo* sobre el elemento de conductor que se encuentra sobre el tramo de curva dl viene dada por

$$d\vec{F} \;=\; I\vec{dl} \times \vec{B} \tag{8.42}$$

La fuerza total sobre el conductor se obtiene por integración sobre la curva que contiene al circuito

$$\vec{F} \;=\; \int_C I\vec{dl} \times \vec{B} \tag{8.43}$$

Es interesante notar que, aunque la curva que contiene a un circuito es cerrada, no hemos utilizado la notación para integrales cerradas. Esto se debe a que generalmente es de interés la fuerza magnética que actúa sobre un tramo del circuito, y no sobre el circuito completo.

8.10. Ejemplo 5: Órbitas en campos uniformes

Supongamos que un campo de inducción magnética uniforme $\vec{B}_0$ ocupa todo el espacio. Para fijar ideas, supongamos que el mismo está orientado en el sentido positivo del eje z. Por otra parte, supongamos que una partícula de masa m y carga Q, es lanzada con velocidad inicial $\vec{v}_0$, desde el origen de coordenadas. Entonces los vectores involucrados son

$$\vec{B}_0 \;=\; (\;0,0,B_0\;) \qquad \vec{r}_0 \;=\; (\;0,0,0\;) \qquad \vec{v}_0 \;=\; (\;v_{0x},v_{0y},v_{0z}\;) \tag{8.44}$$

Combinando la fuerza de Lorentz con la segunda ley de Newton, tenemos

$$\vec{F} \;=\; Q\vec{v}\times\vec{B}_0 \;=\; m\vec{a} \tag{8.45}$$

donde $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son los vectores que representan instantáneamente la velocidad y aceleración de la partícula. Desarrollemos

$$\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ Qv_x & Qv_y & Qv_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \;=\; m\;(\;a_x,a_y,a_z\;) \tag{8.46}$$

De aquí obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} QB_0\;v_y &= m\,\frac{dv_x}{dt} \\ -QB_0\;v_x &= m\,\frac{dv_y}{dt} \\ 0 &= m\,\frac{dv_z}{dt} \end{aligned} \tag{8.47}$$

La tercera de las ecuaciones tiene una solución inmediata. Ya que se trata de una derivada primera igualada a cero, tenemos que la velocidad mantendrá constante

la componente z, es decir, la componente paralela al campo $\vec{B}_0$. Aplicando las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{aligned} v_z(t) &= v_{0z} \text{ (constante)} \\ z(t) &= v_{0z}t \end{aligned} \tag{8.48}$$

Las otras dos ecuaciones pueden desacoplarse derivándolas y reemplazando

$$\begin{aligned} -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 v_x &= \frac{d^2v_x}{dt^2} \\ -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 v_y &= \frac{d^2v_y}{dt^2} \end{aligned} \tag{8.49}$$

Cada una de estas ecuaciones diferenciales puede ser resuelta por separado. Como la velocidad es la derivada primera de la posición respecto del tiempo, la primera integración es directa. Administrando cuidadosamente las constantes, tenemos

$$\begin{aligned} -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (x - x_c) &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ -\left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (y - y_c) &= \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned} \tag{8.50}$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x - x_c)}{dt^2} + \left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (x - x_c) &= 0 \\ \frac{d^2(y - y_c)}{dt^2} + \left(\frac{QB_0}{m}\right)^2 (y - y_c) &= 0 \end{aligned} \tag{8.51}$$

donde x_C e y_C son constantes de integración a determinar. Las formas de la derecha han sido incorporadas para que el estudiante recuerde los osciladores armónicos. En efecto, ellos tenían la misma ecuación diferencial, y por tanto, la misma clase de soluciones. Entonces no hace falta calcular. Simplemente escribimos las soluciones y sus derivadas primeras, que serán útiles después

$$\begin{aligned} x - x_C &= A_x \sin(\omega t + \phi_x) & \qquad y - y_C &= A_y \sin(\omega t + \phi_y) \\ v_x &= A_x\omega \cos(\omega t + \phi_x) & \qquad v_y &= A_y\omega \cos(\omega t + \phi_y) \end{aligned} \tag{8.52}$$

donde las amplitudes A_x y A_y, junto con las fases iniciales ϕ_x y ϕ_y son constantes a determinar, mientras que la frecuencia angular ω es la misma en ambas soluciones y vale

$$\omega \;=\; \frac{QB_0}{m} \tag{8.53}$$

En el instante inicial tendremos

$$\begin{array}{rclcrcl} -x_C &=& A_x \; \sin(\phi_x) & \qquad & -y_C &=& A_y \; \sin(\phi_y) \\ v_{0x} &=& A_x\omega \; \cos(\phi_x) & \qquad & v_{0y} &=& A_y\omega \; \cos(\phi_y) \end{array} \tag{8.54}$$

El panorama podrá resultar algo desalentador, si observamos que disponemos de cuatro condiciones iniciales y seis constantes a determinar. Pero no hay que alarmarse, especialmente si recordamos que las fuerzas magnéticas, cuando actúan solas, cuidan de no cambiar la energía cinética. Esto puede escribirse como sigue

$$\frac{1}{2}m \; \left[\, v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \, \right] \;=\; \frac{1}{2}m\omega^2 \; \left[\, A_x^2 \; \cos^2(\, \omega t + \phi_x \,) \; + \; A_y^2 \; \cos^2(\, \omega t + \phi_y \,) \, \right] \tag{8.55}$$

Esta expresión merece una atención muy especial, porque probablemente nunca hayamos tratado algo parecido. Comencemos por observar que el primer miembro es constante, mientras que el segundo es una función del tiempo. Como la igualdad debe cumplirse para todo tiempo t, el corchete del segundo miembro debe ser constante. Esto solo puede lograrse haciendo

$$A_y \;=\; A_x \quad \text{y} \quad \cos(\, \omega t + \phi_y \,) = \sin(\, \omega t + \phi_x \,) = \cos\left(\, \omega t + \phi_x - \frac{\pi}{2} \, \right) \tag{8.56}$$

de donde se concluye que

$$\phi_y \;=\; \phi_x - \frac{\pi}{2} \tag{8.57}$$

Para simplificar la notación hacemos $A = A_x$ y $\phi = \phi_x$, con lo que las condiciones iniciales toman la forma

$$\begin{array}{rclcrcl} -x_C &=& A \; \sin(\phi) & \qquad & y_C &=& A \; \cos(\phi) \\ v_{0x} &=& A\omega \; \cos(\phi) & \qquad & v_{0y} &=& A\omega \; \sin(\phi) \end{array} \tag{8.58}$$

Ahora sí tenemos cuatro ecuaciones y cuatro constantes a determinar. Con un poco de trabajo llegamos a

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) \qquad \begin{array}{rcl} x_C & = & -A\ \sin(\phi) \\ y_C & = & A\ \cos(\phi) \end{array} \tag{8.59}$$

Con esto quedan completamente caracterizadas las funciones del tiempo que describen la posición de la partícula. Las pasamos en limpio para analizarlas.

$$\begin{array}{lcl} x - x_C & = & A\ \sin(\omega t + \phi) \\ y - y_C & = & A\ \cos(\omega t + \phi) \\ z & = & v_{0z} t \end{array} \tag{8.60}$$

Entre las dos primeras funciones podemos eliminar el tiempo para tener una idea de la trayectoria. Para ello, elevamos al cuadrado ambas funciones, y luego las sumamos. Así obtenemos

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = A^2 \tag{8.61}$$

Esta es la relación funcional que define una circunferencia de radio A, centrada en (x_C, y_C). Observando que el movimiento contiene además un desplazamiento uniforme en z, concluimos que la órbita será una hélice de paso constante alrededor de un eje paralelo al campo $\vec{B}_0$ que pasa por (x_C, y_C). La misma se desarrolla sobre una superficie cilíndrica de radio A.

8.11. Las leyes integrales de la magnetostática

Cuando tratamos la electrostática, analizamos el comportamiento del campo $\vec{E}$ bajo dos miradas integrales. En la ley de Gauss estudiamos el flujo de $\vec{E}$ a través de cualquier superficie cerrada. Luego, vimos que también resultaba conservativo al analizar la circulación sobre cualquier curva cerrada. Ahora nos proponemos hacer los mismos análisis sobre el campo de inducción magnética $\vec{B}$. Estos resultados podrían derivarse de la ley de Biot-Savart, pero nosotros no haremos tales deducciones. Nos limitaremos a dar enunciados precisos y centraremos la atención en sus consecuencias más importantes.

8.12. Ley de Gauss magnética

Consideremos una región del espacio en la que existe un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ invariante con el tiempo. Sea S una superficie cerrada imaginaria cualquiera que se encuentra en la región. Sea $\vec{ds}$ el nombre genérico de los vectores diferenciales normales exteriores de la superficie S. Entonces, el flujo del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ a través de la superficie cerrada S, es siempre nulo.

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \;=\; 0 \tag{8.62}$$

A partir de este enunciado podemos sacar algunas conclusiones inmediatas. En primer lugar, recordemos brevemente el caso electrostático. En ese caso, el flujo era proporcional a la carga eléctrica neta encerrada por la superficie, y decíamos que las cargas eran las “fuentes escalares" del campo. Además era precisamente en las cargas donde empezaban y terminaban las líneas de campo.

La ley de Gauss magnética, por analogía nos dice que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ “no posee fuentes escalares". En otras palabras, no existe un análogo magnético de la carga eléctrica. A la vez, de esta propiedad se desprende que las líneas del campo $\vec{B}(\vec{r})$ no tienen ni inicio ni fin. Esto sugiere que las mismas son necesariamente cerradas.

8.13. Ley de Ampère

Consideremos una región del espacio en que yace una distribución de corriente estacionaria $\vec{J}(\vec{r})$, y el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ que ella produce. Sea C una curva simple cerrada cualquiera, y sea S una cualquiera de las superficies limitadas por la curva C. Sea $\vec{dl}$ un elemento de longitud de la curva C, cuya orientación ha sido elegida arbitrariamente. Sea $\vec{ds}$ un elemento de área de la superficie S, cuya orientación cumple con la regla de la mano derecha respecto de $\vec{dl}$. Entonces, la circulación del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ a lo largo de la curva cerrada C, es proporcional al flujo de la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$ a través de la superficie S:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \;=\; 4\pi k' \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \tag{8.63}$$

Expresión de bolsillo: La ley de Ampère suele recordarse observando que

la integral del segundo miembro es la corriente que atraviesa la superficie S. Llamando I_S a tal corriente podemos escribir

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \; = \; 4\pi k' I_S \tag{8.64}$$

La principal observación que surge de la ley de Ampère es que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ es "no conservativo". Por lo tanto no será posible derivarlo de un potencial escalar, tal como hacíamos con el campo electrostático. Por otra parte, esta ley puede utilizarse para el cálculo del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en casos muy particulares, en los que la distribución de corrientes presenta muy alta simetría.

8.14. Otra vuelta de tuerca sobre simetrías

Y otra vez la cuestión de las simetrías... Pero ahora en relación con la ley de Ampère. ¿Qué nuevo condimento tienen los fenómenos magnéticos? Aparece una diferencia fundamental, residente en que las fuentes del campo $\vec{B}(\vec{r})$ son fuentes vectoriales (corrientes estacionarias). Esta diferencia con el caso electrostático (en que las fuentes eran escalares) genera una nueva variante de simetría, que en algunas áreas de la física suelen llamarse simetrías magnéticas[5].

Como siempre, estamos interesados en extraer conclusiones acerca de las componentes de $\vec{B}(\vec{r})$, por observación de la simetría de la distribución de corrientes. Para ello, comencemos por reconocer dos propiedades simples que surgen de la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) \; = \; k' \int_D \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid^2} \; \times \; \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\mid \vec{r} - \vec{r'} \mid} \, dv \tag{8.65}$$

Supongamos que D representa el dominio sobre el que se desarrolla la distribución de corriente. Así tendremos

(a) Si la dirección de $\vec{J}(\vec{r'})$ es la misma sobre todo el dominio D, entonces la componente del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en dicha dirección es nula.
(b) Si la distribución de corrientes se invierte (es decir que se cambia $\vec{J}(\vec{r'})$ por $-\vec{J}(\vec{r'})$), entonces el campo $\vec{B}(\vec{r})$ también se invierte. Esto es, $\vec{B}(\vec{r})$ se convierte

[5]Por ejemplo en cristalografía.

en $-\vec{B}(\vec{r})$.

Veamos cómo operan estos conceptos en algunos ejemplos de alta simetría.

I. Hoja de corriente plana infinitamente extendida:

Consideremos un plano infinitamente extendido sobre el cual se desarrolla una corriente uniforme, que cabe ser descripta por una **densidad superficial constante** $\vec{\kappa}$. Note que $\vec{\kappa}$ hace las veces de $\vec{J}$ en problemas donde la distribución se desarrolla sobre dominios superficiales (su unidad será A/m). Para analizar las componentes del campo $\vec{B}(\vec{r})$, elegimos un punto P cualquiera, no contenido en el plano. Sin pérdida de generalidad, podemos elegir el eje z pasando por P en dirección perpendicular al plano de corrientes. El origen lo elegimos en el pie de dicha perpendicular sobre el plano. El eje x lo elegimos coincidente con la dirección de $\vec{\kappa}$, y eje y (por supuesto sobre el plano) de modo que forme una terna directa (ver Figura 8.4).

Apliquemos ahora las condiciones (a) y (b). Como los vectores $\vec{\kappa}$ apuntan todos en dirección x la condición (a) puede aplicarse, por lo que la componente B_x es nula. Ahora imaginemos una rotación en π alrededor del eje z. Recordando que el campo está *atado* a sus fuentes, $\vec{B}(\vec{r})$ gira con el sistema. Al completar el giro, la distribución de fuentes se invirtió respecto de su posición original. Esto es, equivalente a decir que se cambió $\vec{\kappa}$ por $-\vec{\kappa}$. Sin embargo, la componente B_z se mantuvo inalterada. Por tanto B_z entra en contradicción con la propiedad (b) derivada de la ley de Biot-Savart. Entonces, B_z debe ser nula. Así concluimos que la única componente no nula de $\vec{B}$ es B_y. Indagamos ahora acerca de su variabilidad en el espacio. Si la distribución se traslada distancias arbitrarias en x y en y, su aspecto es invariante para un observador situado en P. Por tanto, el campo no puede depender de las cordenadas x e y. Entonces concluimos que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$, toma la forma simple

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; B_y\,(z)\;\breve{j} \tag{8.66}$$

II. Cilindro infinito con corriente axial:

Consideremos ahora un objeto conductor infinitamente largo, por él circula una corriente axial cuya densidad volumétrica $\vec{J}$ depende exclusivamente de la coordenada radial ρ. Esto es, en coordenadas cilíndricas

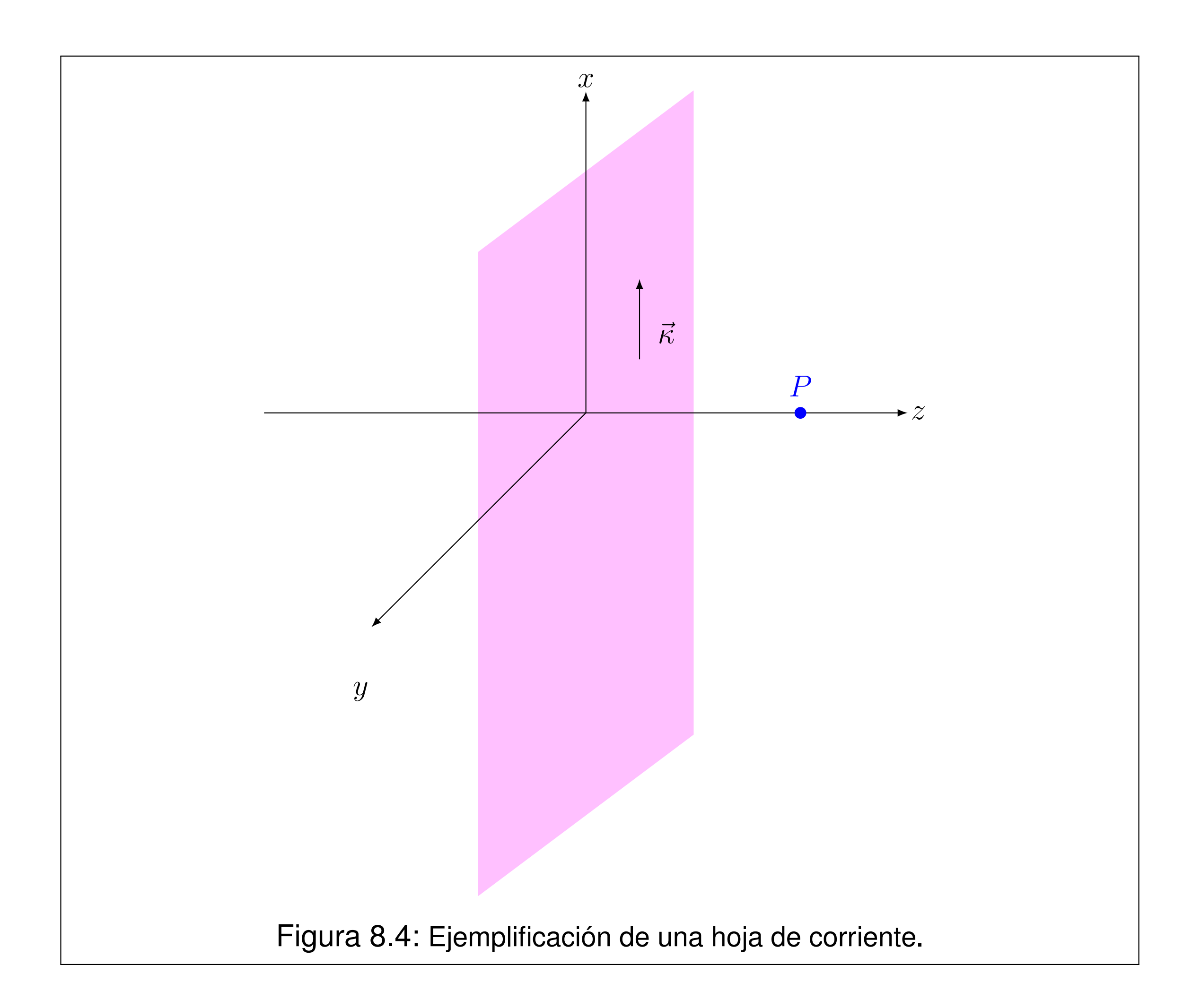


Figura 8.4: Ejemplificación de una hoja de corriente.

$$\vec{J}(\vec{r}) \;=\; J_z\,(\rho)\;\breve{k} \tag{8.67}$$

donde el eje z corre a lo largo del eje del sistema. Nuevamente elegimos un punto P no contenido en el eje de la distribución. Como $\vec{J}$ tiene dirección z en todo el dominio, la componente B_z en P debe ser nula. Ahora imaginemos un eje que pasa por P y corta perpendicularmente al eje z. Si giramos la distribución en π alrededor del eje que pasa por P, su nuevo aspecto tiene los vectores $\vec{J}$ invertidos. Sin embargo, la componente B_ρ mantiene la orientación ante dicha rotación. Esto está en contradicción con la propiedad (b), por lo que B_ρ debe ser nula. Para finalizar el análisis, reconozcamos que un observador situado en P no detecta cambios por rotaciones alrededor del eje de simetría, ni por traslaciones a lo largo del mismo. Entonces $\vec{B}$ no puede depender ni de ϕ ni de z. Así concluimos que el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r})$ en este tipo de sistemas tendrá

la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) \;=\; B_\phi\,(\rho)\;\breve{\phi} \tag{8.68}$$

8.15. Ejemplo 6: Hilo recto infinito (otro enfoque)

Consideremos un hilo conductor recto infinitamente largo, por el que circula una corriente estacionaria I. Naturalmente, trabajamos en coordenadas cilíndricas. El análisis de la simetría nos permite concluir que la única componente no nula de $\vec{B}(\vec{r})$ es la azimutal y solo depende de la coordenada radial ρ. Entonces

$$B_\rho \;=\; B_z \;=\; 0 \qquad B_\phi \;=\; B_\phi\,(\rho) \tag{8.69}$$

De lo que inmediatamente se deduce que las líneas del campo $\vec{B}(\vec{r})$ son circunferencias contenidas en planos perpendiculares al hilo, cuyos centros están precisamente en el hilo. Esta simetría es especialmente apta para determinar el campo de inducción magnética utilizando la ley de Ampère.

Comencemos por elegir como curva de integración C, una línea de campo de radio ρ. La superficie S limitada por C puede ser el círculo de radio ρ contenido en el plano de la circunferencia. Para fijar ideas, supongamos que la corriente circula en el sentido positivo del eje z[6]. Elegimos los vectores $\vec{dl}$ en sentido antihorario visto desde el lado positivo del eje z. En consecuencia, los vectores $\vec{ds}$ deben orientarse en el sentido positivo de z (regla de la mano derecha).

Trabajemos con el primer miembro de la ley de Ampère

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} \;=\; \oint_C B_\phi\,(\rho)\,\breve{\phi}\cdot\; dl\;\breve{\phi} \;=\; \oint_C B_\phi\,(\rho)\;dl \tag{8.70}$$

Como el dominio de integración tiene ρ constante, la componente $\vec{B}_\phi(\rho)$ puede salir de la integral. Entonces

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} \;=\; B_\phi\,(\rho)\,\int_C dl \;=\; 2\pi\rho\;B_\phi\,(\rho) \tag{8.71}$$

[6] Es interesante observar que la corriente es una magnitud escalar, por lo que le corresponde un signo. En tal sentido, la elección hecha aquí puede considerarse como una convención de signos. Esto significa que los resultados que se obtengan podrán ser utilizados aún cuando la corriente vaya en sentido contrario, siempre que al reemplazar su valor se respete su signo.

Ahora pongamos atención en el segundo miembro de la ley de Ampère. Observemos que el dato del problema es la corriente I, con lo que podríamos utilizar simplemente la forma de bosillo. Sin embargo, corresponde una reflexión acerca del signo. En realidad, la corriente es el flujo del vector $\vec{J}$ a través del área del conductor. Por su parte, el área del conductor en el plano de la espira forma parte de la superficie S. Por tanto, I debe considerarse positiva si atraviesa la superficie en el sentido de $\vec{ds}$ y negativa en caso contrario. Esto está en concordancia con nuestra elección de I por lo que no aparecen incompatibilidades de signo. Entonces tenemos

$$2\pi\rho \, B_\phi(\rho) \;=\; 4\pi k' I \tag{8.72}$$

de donde tenemos finalmente que

$$B_\phi(\rho) \;=\; \frac{2k'I}{\rho} \tag{8.73}$$

o recuperando la forma vectorial

$$\vec{B}(\rho) \;=\; \frac{2k'I}{\rho}\,\breve{\phi} \tag{8.74}$$

8.16. Solenoide infinito

En la sección 8.7 encontramos una expresión para el campo de inducción magnética $\vec{B}$, para puntos del eje de un solenoide de longitud finita l y N espiras. Ahora nos proponemos extender este resultado al caso ideal en que el solenoide es infinitamente largo, manteniendo la misma densidad de espiras por unidad de longitud. Además buscaremos para este caso, una expresión que permita determinar el campo $\vec{B}$ en todo el espacio.

El primer objetivo es muy accesible. Para ello denotamos por n a la densidad de espiras por unidad de longitud, la cual será

$$n \;=\; \frac{N}{l} \tag{8.75}$$

Luego, la extensión al caso infinitamente largo consiste simplemente en llevar al límite la expresión (8.40), cuando tanto N como l tienden a infinito manteniendo n constante. Esto es

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; \lim_{l\to\infty} 2\pi k' I n \left[\frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{R^2+\left(\frac{l}{2}-z\right)^2}} \;+\; \frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{R^2+\left(\frac{l}{2}+z\right)^2}} \right] \qquad (8.76)$$

Es fácil reconocer que cada término del corchete tiende a la unidad, por lo que el límite resulta

$$B_z\,(\,0,0,z\,) \;=\; 4\pi k' I n \qquad (8.77)$$

Nótese que, como era de esperarse, el campo de inducción magnética en el eje del solenoide infinitamente largo, no puede depender de la coordenada z. Si acaso esto no fuera evidente, reflexione el lector acerca de la equivalencia de los puntos del eje, respecto de su localización dentro del solenoide.

Afrontamos ahora la determinación del campo $\vec{B}(\vec{r})$ en el resto del espacio. Para esto nos valemos de consideraciones de simetría. La geometría del sistema nos sugiere el uso de coordenadas cilíndricas ρ, ϕ y z. En primer lugar, observamos que rotaciones alrededor del eje de simetría y traslaciones paralelas al mismo no alteran el aspecto de la distribución de corrientes, y por tanto no alteran el campo. De esto se sigue que los campos no pueden depender de las coordenadas ϕ y z. Ahora imaginemos un punto P no perteneciente al eje de simetría, y la recta perpendicular a dicho eje que pasa por P. Supongamos que en P existiera la componente B_ρ. Si rotamos el solenoide alrededor de la recta que contiene a B_ρ en un ángulo π, las corrientes quedan exactamente invertidas. Pero la componente B_ρ queda inalterada, en clara contradicción con la propiedad (b) de la sección 8.14. Entonces dicha componente debe ser nula.

$$B_\rho \;=\; 0 \qquad (8.78)$$

Ahora imaginemos una circunferencia que pasa por el punto P centrada en el eje de simetría del solenoide, y contenida en un plano perpendicular a dicho eje. Llamamos C a la circunferencia y S a la superficie plana que ella limita. La ley de Ampère nos dice que

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} \;=\; \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} \qquad (8.79)$$

de la orientación de los vectores se tiene que

$$\begin{array}{ll} \vec{B} \;=\; B_\phi(\rho)\,\breve{\phi} + B_z(\rho)\,\breve{k} & \vec{J} \;=\; J_\phi\breve{\phi} \\ \vec{dl} \;=\; dl\,\breve{\phi} & \vec{ds} \;=\; ds\,\breve{k} \end{array} \tag{8.80}$$

Entonces

$$\oint_C \left[\, B_\phi(\rho)\,\breve{\phi} + B_z(\rho)\,\breve{k}\,\right] \cdot dl\,\breve{\phi} \;=\; \mu_0 \int_S J_\phi\breve{\phi} \cdot ds\,\breve{k} \tag{8.81}$$

Operando los productos escalares entre versores, las integrales anteriores se reducen a

$$\oint_C B_\phi(\rho)\; dl \;=\; 0 \tag{8.82}$$

Como la circunferencia C se desarrolla en una posición donde ρ resulta constante, podemos decir que $B_\phi(\rho)$ es constante sobre el dominio de integración. Entonces

$$B_\phi(\rho)\; \oint_C dl \;=\; B_\phi(\rho)\; 2\pi\rho \;=\; 0 \tag{8.83}$$

de donde se concluye que la componente azimutal del campo es nula

$$B_\phi(\rho) \;=\; 0 \tag{8.84}$$

Entonces tenemos que la única componente no nula del campo es B_z, y que la misma solo depende de la coordenada ρ. Esto significa que en cualquier lugar del espacio vale que

$$B_\rho \;=\; B_\phi \;=\; 0 \qquad B_z \;=\; B_z(\rho) \tag{8.85}$$

En este punto damos por concluido el análisis de simetría. Veremos que el último resultado tiene información suficiente para resolver el problema en todo el espacio, mediante una aplicación ingeniosa de la ley de Ampère.

Consideremos la curva cerrada C (de aspecto rectangular), localizada como se indica en la Figura 8.5. Elegimos sobre ella los vectores tangentes $\vec{dl}$ en sentido antihorario, subindicándolos consistentemente con el tramo de curva sobre

el que se encuentran. La superficie S limitada por C la elegimos como la figura plana rectangular contenida en el plano del dibujo. Sus vectores normales $\vec{ds}$, en virtud de la regla de la mano derecha, resultan salientes del plano del dibujo.

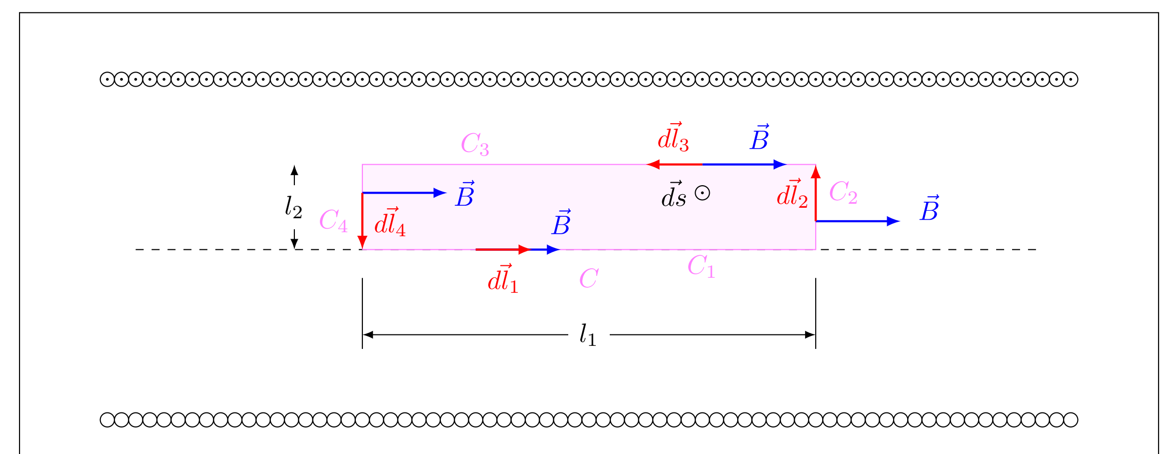


Figura 8.5: Esquema de los elementos geométricos involucrados en la determinación del campo de inducción magnética $\vec{B}$ en la región interior de un solenoide de longitud infinita.

Ahora apliquemos la ley de Ampère sobre C, observando que

$$C \;=\; C_1 \, U \, C_2 \, U \, C_3 \, U C_4 \tag{8.86}$$

Entonces la ley de Ampère toma la forma siguiente

$$\int_{C_1} \vec{B}\cdot\vec{dl}_1 \;+\; \int_{C_2} \vec{B}\cdot\vec{dl}_2 \;+\; \int_{C_3} \vec{B}\cdot\vec{dl}_3 \;+\; \int_{C_4} \vec{B}\cdot\vec{dl}_4 \;=\; \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot\vec{ds} \tag{8.87}$$

Observando el dibujo, es evidente que las integrales subindicadas con números pares son nulas. Esto es porque los vectores de campo de inducción magnética $\vec{B}$ y los vectores tangentes $\vec{dl}$ son mutuamente perpendiculares. Además observemos que la superficie S no es atravesada por corrientes. Entonces concluimos que

$$\int_{C_1} \vec{B}\cdot\vec{dl}_1 \;+\; \int_{C_3} \vec{B}\cdot\vec{dl}_3 \;=\; 0 \tag{8.88}$$

Observemos las integrales anteriores en un formato más explícito. Sobre el tramo 1 el campo $\vec{B}$ es conocido, mientras que en el tramo 3, aunque no sea conocido, sabemos de sus propiedades de simetría. Entonces tenemos

$$\int_0^{l_1} \mu_0 in\breve{k} \cdot dz\breve{k} \; - \; \int_0^{l_1} B_z(\rho)\; \breve{k} \cdot \left(-dz\breve{k}\right) \; = \; 0 \tag{8.89}$$

En las dos integrales, los productos escalares entre versores $\breve{k}$ se reducen a la unidad, mientras que los integrandos son constantes en sus respectivos dominios. Así tenemos

$$\mu_0 in \int_0^{l_1} dz \; - \; B_z(\rho) \int_0^{l_1} dz \; = \; 0 \tag{8.90}$$

Las dos integrales miden l_1, con lo que obtenemos

$$\mu_0 inl_1 \; - \; B_z(\rho)\; l_1 \; = \; 0 \tag{8.91}$$

con lo que finalmente concluimos

$$B_z(\rho) \; = \; \mu_0 in \tag{8.92}$$

Observemos que el resultado es independiente de ρ, por lo que corresponde interpretar que el campo de inducción magnética interno $\vec{B}$ en el solenoide es uniforme, con el mismo valor obtenido sobre el eje.

Ahora nos proponemos determinar el campo de inducción magnética $\vec{B}$ en puntos exteriores al solenoide. Para ello, repetimos la construcción anterior haciendo que la curva C (rectangular) alcance la región exterior, como mostramos en la Figura 8.6.

El análisis realizado para la región interna vale en todos los aspectos, excepto en que el segundo miembro de (8.87) ahora no es nulo. Observe que la corriente que circula por el solenoide corta la superficie S tantas veces como espiras haya enlazadas con la curva C. Esto es

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \; = \; inl_1 \tag{8.93}$$

Entonces tenemos

$$\int_{C_1} \vec{B} \cdot \vec{dl}_1 \; + \; \int_{C_3} \vec{B} \cdot \vec{dl}_3 \; = \; \mu_0 inl_1 \tag{8.94}$$

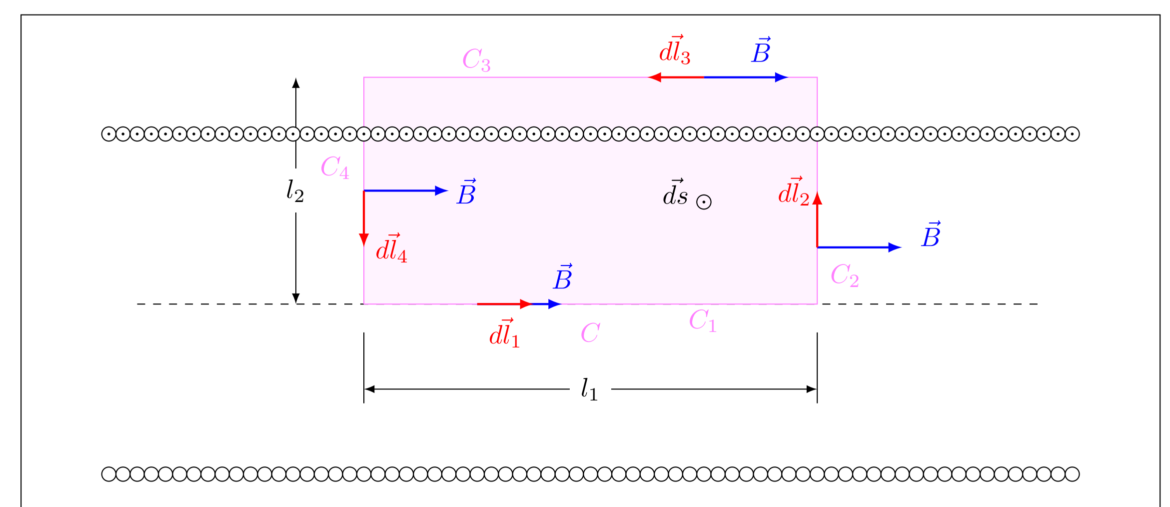


Figura 8.6: Esquema de los elementos geométricos utilizados en la determinación del campo de inducción magnética $\vec{B}$ en la región exterior de un solenoide infinitamente largo.

Repitiendo los pasos del tratamiento anterior, tenemos que

$$\mu_0 inl_1 \ - \ B_z(\rho)\, l_1 \ = \ \mu_0 inl_1 \tag{8.95}$$

de donde concluimos que $B_z(\rho)$ es nula fuera del solenoide

$$B_z(\rho) \ = \ 0 \tag{8.96}$$

Entonces podemos escribir el resultado final en forma compacta

$$\vec{B}(\vec{r}) \ = \ \begin{cases} \mu_0 in\, \breve{k} & \text{si} \quad \rho < R \\ 0 & \text{si} \quad R < \rho \end{cases} \tag{8.97}$$

Este resultado parece en extremo artificial, dado que el sistema que estudiamos es descabelladamente irreal. Sin embargo, constituye una herramienta valiosa por su simplicidad, al modelar solenoides largos. Esto es, cuando la longitud l es mucho mayor que el radio R. En sentido práctico, podemos imaginar un solenoide largo como un cilindro con tapas. La aproximación habitual consiste en suponer que el campo $\vec{B}$ es uniforme dentro del cilindro y nulo afuera.

8.17. Problemas

1. Utilice la ley de Biot-Savart para demostrar las siguientes propiedades:

   a) En todo circuito plano, el campo de inducción magnética producido por dicho circuito en cualquier punto del plano que lo contiene, es siempre perpendicular a dicho plano[7].

   b) Un tramo recto de un circuito no contribuye al campo de inducción magnética en puntos alineados con dicho tramo.

   c) Un tramo de circuito en forma de arco circular de radio R contribuye al campo de inducción magnética en el centro de curvatura, con un aporte dado por

   $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi R} \breve{u}$$

   donde α representa el ángulo subtendido por el arco desde su centro de curvatura, y $\breve{u}$ es un versor perpendicular al plano que contiene el arco.

   d) El campo de inducción magnética producido por un hilo recto infinitamente largo viene dado por

   $$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \breve{\phi}$$

   donde $\breve{\phi}$ es un versor tangente a las circunferencias de radio r, centradas en el hilo y contenidas en planos perpendiculares al mismo.

2. Utilice la ley de Ampère para obtener el campo de inducción magnética producido por un hilo recto infinitamente largo por el que circula una corriente constante I. Compare el resultado con el último inciso del problema anterior.

3. Use argumentos de simetría para calcular el campo de inducción magnética en el punto P[8].



4. *a*) Si la ley de Ampère es válida sobre cualquier trayectoria cerrada, ¿por qué no es apropiada para el cálculo del campo magnético $\vec{B}$ en todos los casos?

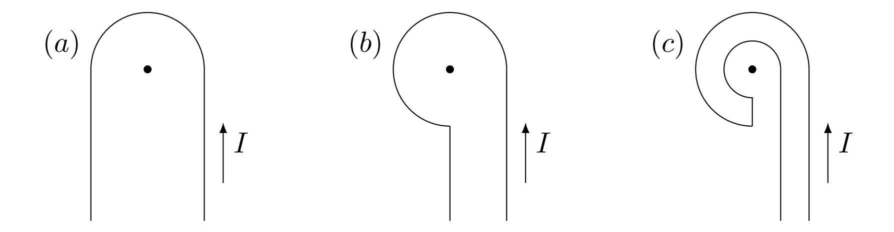
[7]Naturalmente, deben excluirse los puntos del plano por los que pasa el circuito, en los que el campo no está determinado.

[8]Por razones estrictamente didácticas, sugerimos aquí que no utilice la ley de Biot-Savart.

b) Compare las leyes de Ampère y Biot-Savart. ¿Cuál será el método de aplicación más general para calcular el campo de inducción magnética $\vec{B}$, para un circuito afectado por una corriente estacionaria I?

c) Considere la curva de integración involucrada en la ley de Ampère. ¿Puede elegirse esta curva de modo que sus puntos coincidan (en parte o totalmente) con el conductor por el que circula corriente? Discuta casos de distinta dimensionalidad, es decir cuando el conductor se modela como una curva, una superficie o un volumen.

5. Utilice los resultados obtenidos en los problemas anteriores para calcular el campo magnéticocampo de inducción magnética en los centros de curvatura de los circuitos que se detallan a continuación. En cada caso suponga que los radios son de 30 mm (y cuando corresponda un radio pequeño suponga que es de 15 mm), y las corrientes de 2 A. No olvide indicar la dirección y sentido del campo en cada caso.



6. Dos conductores rectilíneos rígidos y muy largos, se encuentran montados paralelamente. Uno de ellos está fijo, mientras que el otro es libre de moverse en el plano que los contiene, manteniéndose paralelo al primero. Describa la respuesta del sistema cuando por ambos conductores circulan corrientes de la misma intensidad en sentidos opuestos. ¿Qué ocurriría si las corrientes circularan en el mismo sentido?

7. Dos largos alambres conductores rectilíneos se encuentran rígidamente emplazados en posiciones paralelas, con una separación $d = 10$ cm. Sobre ellos circulan corrientes en el mismo sentido cuyas intensidades son $I_1 = 5$ A e $I_2 = 8$ A.

   a) Determine la fuerza por unidad de longitud que afecta a cada conductor.

   b) Determine el campo de inducción magnética $\vec{B}$ como función de la posición, sobre el plano que contiene a los conductores.

8. Dos alambres paralelos muy largos están separados una distancia $d = 8$ cm. La intensidad del campo de inducción magnética en un punto situado a mitad de camino entre los dos alambres es $B = 296\,\mu$T. Cosidere que las corrientes que circulan por ambos conductores son de la misma intensidad.

   a) Determine si las corrientes circulan en igual o distinto sentido.

   b) Calcule la intensidad de las corrientes.

9. Por un conductor cilíndrico macizo de radio $R = 4\,$mm, que puede considerarse infinitamente largo, circula una corriente $I = 10\,$A uniformemente distribuida. Determine el lugar geométrico de los puntos donde el módulo del campo de inducción magnética vale $B = 10^{-4}\,$T.

10. Considere un cable coaxil muy largo, de radios $a = 2\,$cm, $b = 1,8\,$cm y $c = 0,4\,$cm. Sobre ambos conductores circulan corrientes antiparalelas de intensidad $I = 120\,$A, uniformemente distribuidas en las respectivas secciones. Deduzca expresiones para el campo de inducción magnética $\vec{B}(r)$ en todas partes, y grafique su módulo $B(r)$ como función de la coordenada radial.

11. Un conductor recto de $10\,$m de largo, forma parte de un circuito por el que circula una corriente de $3\,$A. El mismo se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética uniforme de intensidad $1,5\,$T. Los elementos de corriente $I\,\vec{dl}$ en el conductor y el campo de inducción magnética $\vec{B}$, forman un ángulo de 37°. ¿Cuál será la fuerza que actúa sobre el conductor?

12. Imagine un largo conductor cilíndrico de radio R, por el que circula una corriente no uniforme, cuya densidad viene dada por

$$\vec{J}(r) = J_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \breve{k}$$

donde r representa la distancia al eje del cilindro, J_0 es una constante positiva con unidades de densidad volumétrica de corriente (A/m^2).

   a) Encuentre una expresión para el campo de inducción magnética $\vec{B}(r)$ como función de la coordenada r, dentro ($r < R$) y fuera ($r > R$) del conductor.

   b) Grafique el módulo del campo de inducción magnética como función de r.

   c) Determine el lugar donde la intensidad de campo de inducción magnética es máxima, y el valor de la misma en dicho sitio.

13. Por una espira conductora cuadrada de lado $l = 6\,$cm, circula una corriente de $10\,$A. La misma se halla inmersa en un campo de inducción magnética uniforme de intensidad $B = 5\,$T, de modo que el ángulo entre el campo y la dirección normal al plano de la espira es $\theta = 53^o$.

   a) Determine la fuerza magnética sobre cada lado de la espira.

   b) Determine la fuerza magnética total sobre la espira y el torque respecto de su centro.

14. Considere un conductor rectilíneo muy largo contenido en el mismo plano que una espira conductora rectangular cuyos lados son $a = 20\,$cm y $b = 40\,$cm. La espira está dispuesta de modo tal que sus lados menores son paralelos al conductor rectilíneo, y la distancia entre ambos es $c = 10\,$cm. Por el conductor rectilíneo

circula una corriente $I_1 = 20$ A, y por la espira una corriente $I_2 = 10$ A. Determine la fuerza magnética ejercida sobre la espira.

15. Se denomina solenoide a un arrollamiento de espiras paralelas apretadas, que han sido devanadas sobre una superficie cilíndrica. Determinar el campo de inducción magnética de este objeto suele ser un clásico de los cursos introductorios, por lo que sugerimos que repase los lineamientos que proponemos a continuación:

    a) Determine el campo magnético en los puntos del eje de una espira de radio R por la que circula una corriente constante I.

    Importante: use la Ley de Biot-Savart.

    b) Considere un solenoide formado por N espiras idénticas a las del inciso anterior, de modo que la longitud total del solenoide sea L. En estas condiciones determine el campo de inducción magnética sobre los puntos del eje del montaje.

    c) Extienda el análisis al caso en que tanto N como L se hacen infinitos, manteniendo la proporción $n = N/L =$ constante.

    d) Utilice la ley de Ampère para extender el resultado del inciso anterior (válido exclusivamente sobre el eje), a cualquier otro punto del interior del solenoide.

    e) Use nuevamente la ley de Ampère para probar que, en las condiciones del inciso (c), el campo exterior es nulo.

16. Un solenoide de longitud $l = 40$ cm y diámetro $d = 1$ cm, está formado por 1000 vueltas de alambre bien apretadas.

    a) ¿Qué corriente debe circular por el solenoide para que el campo de inducción magnética en su centro tenga una intensidad $B = 10^{-4}$ T?

    b) Con la corriente calculada en el inciso anterior, ¿Cuál será la intensidad del campo de inducción magnética en los extremos del solenoide, justo sobre su eje?

17. Un protón es lanzado con rapidez $v = 4 \times 10^6$ m/s en una región con campo de inducción magnética uniforme de intensidad $B = 2$ T. Suponga que inicialmente la velocidad del protón es perpendicular al campo magnético.

    a) Determine la fuerza que actúa inicialmente sobre el protón. Grafique claramente los vectores campo magnético $\vec{B}$, velocidad $\vec{v}$ y fuerza $\vec{F}$ en el estado inicial y después de algún tiempo.

    b) Calcule el radio de la órbita del protón.

18. El selector de velocidad de un espectrógrafo de masas está ajustado para que la rapidez de salida de los iones sea de 3×10^5 m/s. Para ello, el módulo del campo eléctrico se ha fijado en $1,5 \times 10^{-3}$ N/C.

a) ¿Cuál será el módulo del campo de inducción magnética?

b) Si el módulo del campo de inducción magnética en el espectrógrafo es $1,2$ T, ¿Cuál será el radio de la órbita de un ión He^+ de carga e y masa $6,68 \times 10^{-27}$ Kg?

Capítulo 9
Campos variables en el tiempo

9.1. Ley de Faraday

Consideremos una región del espacio donde yacen simultáneamente un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ y un campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r},t)$ que pueden variar con el tiempo. Elegimos una curva simple cerrada C cualquiera (que no cambie con el tiempo), y una de las superficies limitadas por C (también fija), a la que llamaremos S. Luego elegimos una orientación para circular sobre C, definiendo los vectores $\vec{dl}$ tangentes a C, en el sentido elegido. Consistentemente, definimos los vectores $\vec{ds}$ perpendiculares a S, cuyo sentido debe respetar la regla de la mano derecha en relación con $\vec{dl}$. Entonces, la circulación del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ sobre la curva cerrada C, es proporcional al valor cambiado de signo, que adquiera la derivada temporal del flujo magnético a través de la superficie S. Esto es

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} \;=\; -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} \qquad \textbf{Ley de Faraday} \qquad (9.1)$$

Una lectura inmediata de la ley de Faraday nos indica la aparición de una nueva variedad de campos eléctricos. ¿Por qué una nueva variedad? Observe el lector que la integral de circulación del primer miembro era ya conocida en el contexto de la electrostática. Justamente, en dicho contexto resultaba siempre nula, por lo que aseveramos que el campo electrostático es conservativo. Ahora resulta que esto ya no es así. Cuando se admiten modificaciones temporales, el campo eléctrico puede ser **no conservativo**, en cuyo caso sus fuentes están relacionadas con la variación temporal del flujo magnético. En otras palabras, decimos que *variaciones temporales del flujo magnético dan lugar a la creación de un campo eléctrico no conservativo.*

En el segundo miembro de la ley de Faraday, observamos que la derivada temporal abarca la integral de flujo magnético. Entonces, cualquier modificación de dicho flujo dará lugar a que la derivada tome valores no nulos. Aquí debemos enfatizar que la curva C y la superficie S involucradas no admiten modificaciones en el tiempo. Por lo tanto, esta versión de la ley de Faraday *solo* permite que el flujo magnético se modifique por cambios temporales del campo de inducción magnética $\vec{B}$. En tal sentido, la expresión (9.1) podría escribirse como sigue

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} \; = \; - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \tag{9.2}$$

En la sección siguiente, veremos que puede ensayarse una extensión más abarcativa.

9.2. Extensión al caso de geometría variable

Analicemos qué hechos pueden dar lugar a variaciones del flujo magnético. Aquí van algunas posibilidades:

a) Que el campo de inducción magnética $\vec{B}$ varíe con el tiempo.

b) Que la curva C, y por consiguiente la superficie S, cambien de posición u orientación con el tiempo.

c) Que la curva C y la superficie S cambie de forma con el tiempo.

Por supuesto que cuando ocurre alguno de estos hechos, no hay garantía de que el flujo efectivamente varíe. Habrá que analizar cada caso en particular. Sin embargo, la ley de Faraday tal como fue enunciada no contempla los casos b) y c), porque no cumplen con la condición de curva fija.

Una extensión operativamente útil puede resolver el problema. Consideremos una curva cerrada C que puede moverse o deformarse de manera continua en el tiempo (sin perder su carácter de curva cerrada). Sea S una superficie limitada por C que puede deformarse acompañando los cambios de C. Entonces, la versión extendida de la ley de Faraday toma la forma

$$\oint_C \left(\vec{E} \, + \, \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{dl} \; = \; -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{ds} \tag{9.3}$$

donde $\vec{v}$ representa la velocidad con que se desplaza el elemento $\vec{dl}$ de la curva C que se está considerando en la integración.

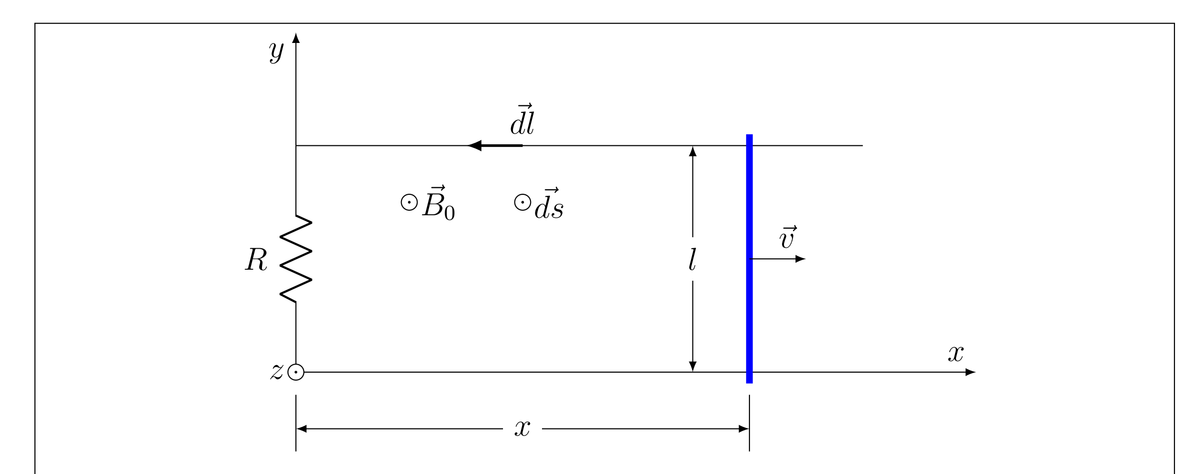


Figura 9.1: Esquema de una horquilla fija sobre la que se desplaza una varilla. El montaje está inmerso en un campo de inducción magnética perpendicular al plano de la horquilla. Luego se especifican los elementos geométricos involucrados en el análisis.

9.3. Proyección tecnológica

La ley de Faraday constituye uno de los logros más trascendentales de la historia de la Ciencia, calificativo que merecería ya por ser una pieza clave en la formulación de la teoría electromagnética. Pero hay mucho más. Según cuentan los que conocen la historia, parece que un distinguido científico (casi seguramente miembro de la Royal Society) le preguntó a Faraday: "...más allá del simpático efecto al que usted refiere, digamé ¿para qué puede servir que en un lazo conductor se establezca una corriente, frente a la variación del flujo magnético?" Naturalmente, Faraday desconocía la respuesta, por lo que contestó con una nueva pregunta... "Usted podría decirme a priori ¿para qué sirve un bebé que hoy mismo está naciendo? Si quiere saberlo, debe esperar pacientemente acompañando su desarrollo con esmerados cuidados..." La historia mostró que aquel efecto sería uno de los principales promotores del desarrollo tecnológico desde el último cuarto del siglo XIX hasta nuestros días.

Pero, ¿cómo fue esa historia? En realidad, la ley de Faraday no nació con el formato que la presentamos hoy, sino que había una diferencia menor (¿menor?): la curva cerrada C no era una curva imaginaria cualquiera del espacio, sino un hilo conductor cerrado. Esta posibilidad sigue siendo válida en la formulación actual, aunque se admiten otras variantes. Pero centrémonos en esa primera mirada, desarrollando el ejemplo más elemental posible.

Consideremos una horquilla formada por dos varillas conductoras paralelas, unidas por un puente resistivo en uno de los extremos (ver Figura 9.1).

Otra varilla conductora se desliza sobre los lados paralelos, de modo que con

su contacto cierra un circuito rectangular de área variable. Para fijar ideas, suponga que la varilla móvil viaja hacia la derecha con velocidad constante $\vec{v}$, mientras que el montaje completo se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética uniforme $\vec{B}_0$, perpendicular al plano de la horquilla y saliente del dibujo. El origen de coordenadas, y la terna directa de ejes se indican en la Figura 9.1, con lo que los vectores velocidad y campo de inducción magnética toman la forma

$$\vec{v} = v\,\breve{i} \qquad \vec{B}_0 = B_0\breve{k} \tag{9.4}$$

¿Cuál será la espectativa respecto del funcionamiento de este sistema? Vayamos por partes.

(a) En primer lugar, supongamos que el circuito formado por la horquilla y la varilla, constituye la curva C. Como se trata de una curva variable en el tiempo, para aplicar la ley de Faraday debemos utilizar la versión (9.3).

(b) Al moverse, la varilla cambia el área de la superficie S, y por consiguiente cambia el flujo magnético a través de la misma. Esto dará lugar a que la circulación del primer miembro de (9.3) resulte no nula. Siempre que ocurre esto sobre un circuito, decimos que el circuito está afectado por una fuerza electromotriz ϵ dada por

$$\epsilon = \oint_C \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{dl} \tag{9.5}$$

Recordando la relación entre esta integral y el trabajo mecánico, podemos definir la **fuerza electromotriz inducida** ϵ como el trabajo por unidad de carga móvil del circuito, aportado por el fenómeno electromagnético.

(c) Como consecuencia de la fuerza electromotriz aparecerá una corriente en el circuito, dando lugar a la disipación térmica por efecto Joule en el resistor.

(d) Dado que por la varilla móvil circula una corriente, y que la misma se desplaza dentro de un campo de inducción magnética, aparecerá sobre ella una fuerza magnética.

(e) Para que la velocidad sea constante, será necesario que un agente externo aporte una fuerza que compense la fuerza magnética.

Antes de comenzar con la resolución, definamos la geometría. Llamaremos C a la curva que describe el circuito, la cual tendrá un formato variable. Sobre ella elegimos que los vectores $\vec{dl}$ estén orientados en sentido antihorario. Luego elegimos que la superficie S sea el sector del plano limitado por C, y sus vectores normales $\vec{ds}$, en virtud de la regla de la mano derecha, resultan salientes del plano del dibujo.

$$\vec{ds} = ds\,\breve{k} \tag{9.6}$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar la ley de Faraday (9.3). Comencemos por calcular el flujo magnético:

$$\Phi_{\vec{B}S} = \int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} = \int_S B_0\breve{k}\cdot ds\breve{k} = \int_S B_0\,ds = B_0\int_S ds = B_0A \tag{9.7}$$

donde $\Phi_{\vec{B}S}$ se ha utilizado como notación habitual para flujos. Observe que A es el área variable de la superfice S que puede escribirse como

$$A = lx \tag{9.8}$$

donde l es la separación entre los lados paralelos de la horquilla. Ahora escribimos la ley de Faraday en una forma *casi* de bolsillo[1]

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_{\vec{B}S}}{dt} \tag{9.9}$$

Reemplazando (9.7) y (9.8) en (9.9) y operando, tenemos

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}(B_0lx) = -B_0l\,\frac{dx}{dt} = -B_0lv_x = B_0lv \tag{9.10}$$

Si R es la resistencia del circuito, la ley de Ohm nos conduce a la corriente I que circula por el mismo

$$\epsilon = IR \qquad \Longrightarrow \qquad I = -\frac{B_0lv}{R} \tag{9.11}$$

y la potencia convertida por efecto Joule en el resistor es

$$P = I^2R = \frac{B_0^2l^2v^2}{R} \tag{9.12}$$

[1] Decimos casi, porque este formato no es terminológicamente adecuado para todos los casos. La fuerza electromotriz es un concepto de neto corte tecnológico, por lo que no se condice con usos de la ley de Faraday en aplicaciones en el vacío libre de cargas.

Analicemos la fuerza magnética que actúa sobre la varilla móvil. Para ello imaginamos la varilla segmentada en tramos diferenciales, cada uno de los cuales está caracterizado por un vector $\vec{dl}$. Por otra parte, el campo de inducción magnética $\vec{B}_0$ ejerce su influencia sobre cada uno de estos elementos. Las formas vectoriales consistentes con la geometría planteada son

$$\vec{dl} \ = \ dy \, \breve{\jmath} \qquad I \, \vec{dl} \ = \ -\frac{B_0 l v}{R} dy \breve{\jmath} \qquad \vec{B}_0 \ = \ B_0 \breve{k} \tag{9.13}$$

Entonces, la contribución $d\vec{F}_M$ a la fuerza magnética sobre cada elemento $\vec{dl}$ de la varilla viene dada por

$$d\vec{F}_M \ = \ I \, \vec{dl} \times \vec{B}_0 \ = \ -\frac{B_0 l v}{R} \, dy \, \breve{\jmath} \times \vec{B}_0 \breve{k} \ = \ -\frac{B_0^2 l v}{R} \, dy \, \breve{\imath} \tag{9.14}$$

La fuerza total se obtiene por integración sobre toda la varilla. Observando las constantes del caso, tenemos

$$\vec{F}_M \ = \ -\frac{B_0^2 l v \, \breve{\imath}}{R} \int_0^l dy \ = \ -\frac{B_0^2 l^2 v}{R} \, \breve{\imath} \tag{9.15}$$

Entonces concluimos que la fuerza magnética $\vec{F}_M$ es opuesta a la velocidad. Ahora bien, según hemos propuesto en las hipótesis, la varilla viaja a velocidad constante $\vec{v}$, por lo que la fuerza neta sobre ella debe ser nula. De esto se deriva que hay otra fuerza sobre la varilla, que compensa el efecto magnético. Esta fuerza debe ser aportada por un agente externo, por lo que la llamaremos **fuerza externa** y la denotaremos por $\vec{F}_{EXT}$. Entonces

$$\vec{F}_M \ + \ \vec{F}_{EXT} \ = \ 0 \tag{9.16}$$

Aquí cabe preguntarse: ¿qué potencia mecánica estará aportando el agente externo para sostener el movimiento de la varilla? Consideremos el desplazamiento de la varilla entre dos posiciones rotuladas como x_1 y x_2, por las que la misma pasa en los tiempos t_1 y t_2 respectivamente. La potencia media P_{EXT} desarrollada por el agente externo en este recorrido será

$$P_{EXT} \ = \ \frac{W_{\vec{F}_{EXT}}}{\Delta t} \ = \ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_1^2 \vec{F}_{EXT} \cdot \vec{dl}' \tag{9.17}$$

donde $\vec{dl'}$ es un elemento del camino. Los vectores involucrados son

$$\vec{F}_{EXT} \;=\; \frac{B_0^2 l^2 v}{R}\,\breve{\imath} \quad y \quad \vec{dl'} \;=\; dx\,\breve{\imath} \tag{9.18}$$

Entonces

$$P_{EXT} \;=\; \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{x_1}^{x_2} \frac{B_0^2 l^2 v}{R}\,\breve{\imath}\cdot dx\,\breve{\imath} \;=\; \frac{B_0^2 l^2 v}{R}\,\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{9.19}$$

Como la velocidad es constante, el segundo cociente coincide con el módulo de dicha velocidad. Finalmente tenemos que

$$P_{EXT} \;=\; \frac{B_0^2 l^2 v^2}{R} \tag{9.20}$$

Este resultado coincide exactamente con la potencia convertida por efecto Joule, que fuera obtenida en (9.11). Discutamos la trascendencia de este resultado. En primer lugar observemos que el mecanismo en conjunto permite la conversión de trabajo mecánico en energía térmica disponible para ser transferida en forma de calor en diversos usos. ¿De qué manera se ha utilizado esto como clave del progreso tecnológico? Para comprender esto, nos remitiremos a una historia que, aunque ficticia, podría representar la realidad muchas veces repetida. Cuando los antiguos pobladores de una pequeña comunidad se organizaron en forma colectiva, tenían la necesidad de recolectar leña en los alrededores de la aldea. Esta tarea de acarreo y almacenamiento era trabajosa pero simple. Sin embargo, las ventajas de vivir en comunidades concentradas en pueblos, llevó a una creciente demanda energética que complicaba las cosas. La Naturaleza no proveía suficiente leña en bosques cercanos, por lo que los acarreos eran largos y dificultosos. Apareció la competencia con los poblados vecinos por el control de los recursos energéticos, y todo lo que ya sabemos... El sistema colapsó. Pasaron algunos siglos de acuerdos y desacuerdos (que por supuesto, siguen hasta hoy), hasta que apareció una alternativa al problema de transporte de energía (entiéndase bien, solo se resuelve en parte el problema de transporte). ¿Cómo funciona? Se convierte energía mecánica en electricidad, donde hay recursos naturales. Luego se “transporta” la electricidad por los cables hasta los centros de consumo. Allí se la distribuye (se la factura) y se la reconvierte para diversos usos.

9.4. Ejemplo 1. Espiras rotantes

Consideremos una espira plana que es obligada a girar con velocidad angular constante ω, alrededor de un eje contenido en el mismo plano de la espira. Suponga que el montaje se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética $\vec{B}$ uniforme e invariante en el tiempo, cuya orientación es perpendicular al eje de giro. El movimiento de la espira es garantizado por el trabajo que aporta un agente externo. Para fijar ideas, consideremos que la espira es un alambre conductor de forma rectangular, que gira alrededor de un eje que pasa por su centro como indica la Figura 9.2.

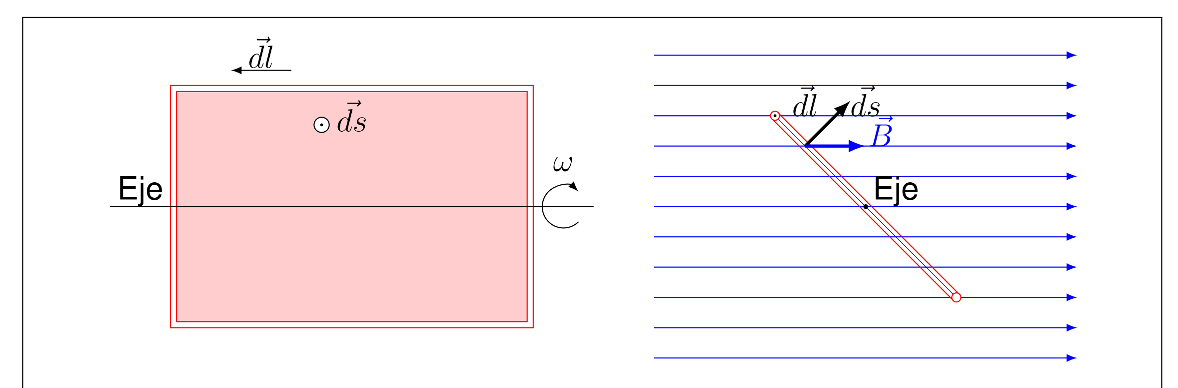


Figura 9.2: A la izquierda representamos una espira rectangular que puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro y es paralelo a dos de sus lados. A la derecha mostramos la misma espira vista de perfil en un instante, mientras rota con velocidad angular constante dentro de un campo de inducción magnética uniforme.

Para aplicar la ley de Faraday, elegimos la curva cerrada C sobre la espira, y la superficie S como el sector plano rectangular limitado por C. Elegimos la circulación antihoraria como positiva, y consistentemente la superficie queda orientada con sus vectores normales salientes del plano del dibujo. Aquí hay que tener mucho cuidado, porque la espira cambiará de posición con el tiempo por lo que la orientación elegida puede prestarse a confusiones. Entonces debemos enfatizar que la orientación elegida debe respetarse en todo tiempo sobre la espira, por lo que una buena práctica sería "pintar" el alambre con la flecha que indica el sentido elegido para los vectores $\vec{dl}$.

Ahora imaginemos que la espira está moviéndose dentro del campo de inducción magnética $\vec{B}$. Entonces aparecerá sobre ella una fuerza electromotriz inducida ϵ dada por

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{ds} \tag{9.21}$$

Los vectores involucrados en el flujo son $\vec{B}$ y $\vec{ds}$. Sus módulos son constantes, pero sus orientaciones relativas varían con el tiempo. En la Figura 9.2 vemos a la espira en un instante mientras gira. Los vectores son idénticos sobre toda la superficie, y el ángulo que forman en ese instante es

$$\theta \; = \; \theta_0 + \omega t \tag{9.22}$$

Entonces

$$\epsilon \; = \; -\frac{d}{dt} \int_S B \, \cos\left(\theta_0 + \omega t\right) \, ds \; = \; -\frac{d}{dt} \left[B \, \cos\left(\theta_0 + \omega t\right) \int_S \, ds \right] \tag{9.23}$$

La integral representa el área de la espira, a la que identificaremos por A. Resolviendo la derivación, tenemos

$$\epsilon \; = \; BA\omega \, \sin\left(\theta_0 + \omega t\right) \tag{9.24}$$

Este resultado representa una fuerza electromotriz oscilante de amplitud ϵ_0, con lo que tenemos

$$\epsilon_0 \; = \; BA\omega \qquad \Longrightarrow \qquad \epsilon\left(t\right) \; = \; \epsilon_0 \, \sin\left(\theta_0 + \omega t\right) \tag{9.25}$$

Cuando la fuerza electromotriz tiene esta forma de variación temporal, la llamamos **f.e.m. alterna**.

El fenómeno que describimos en este ejemplo constituye la base de funcionamiento de la más difundida clase de **generadores eléctricos**. Habitualmente, los generadores que suministran una f.e.m. alterna se llaman **alternadores**. Otras máquinas que funcionan bajo la misma idea básica se llaman **dínamos**, pero un mecanismo de conmutación hace que la f.e.m. que producen sea del tipo continua.

La expresión (9.25) muestra que la amplitud de la f.e.m alterna depende del área de la espira, por lo que los diseños compactos de generadores no utilizan una única espira, sino un arrollamiento formado por N espiras muy apretadas. En estos casos, la amplitud se convierte en

$$\epsilon_0 \; = \; NBA\omega \tag{9.26}$$

9.5. Ejemplo 2. Espira móvil

Supongamos que cierta región del espacio de ancho $2d$ está afectada por un campo de inducción magnética uniforme $\vec{B}$. Supongamos además que una espira cuadrada de lado $2l$ y resistencia R, se desplaza perpendicularmente al campo con velocidad constante $\vec{v}$, como indica la secuencia de la Figura 9.3. Nos preguntamos acerca de la corriente que circulará por la espira en cada tramo de su recorrido.

Para desarrollar el problema, necesitamos un marco geométrico adecuado. Elegimos el origen de coordenadas y los ejes como se indica en el primer dibujo de la secuencia (Figura 9.3 a)). Luego reservaremos la notación x para identificar la abscisa del centro de la espira (note que inicialmente es negativa). Ahora elegimos el sentido de circulación antihorario como positivo sobre la espira, por lo que la superficie plana limitada por la misma queda orientada con sus vectores normales salientes. Aquí proponemos que el estudiante determine el flujo por observación directa sobre el gráfico, hasta convencerse de lo que sigue

$$\Phi_{\vec{B}S}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -(d+l) \\ 2Bl\,(x+d+l) & \text{si} \quad -(d+l) < x < -(d-l) \\ 4Bl^2 & \text{si} \quad -(d-l) < x < (d-l) \\ 2Bl\,(x-d-l) & \text{si} \quad (d-l) < x < (d+l) \\ 0 & \text{si} \quad (d+l) < x \end{cases} \tag{9.27}$$

En la Figura 9.4 representamos el flujo magnético $\Phi_{\vec{B}S}$ como función de la coordenada x.

Apliquemos la ley de Faraday, pero cuidando mucho el detalle de la derivación. Observe que utilizamos la regla de la cadena

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}\Phi_{\vec{B}S} = -\frac{d}{dx}\Phi_{\vec{B}S}(x)\,\frac{dx}{dt} = -v_x\frac{d}{dx}\Phi_{\vec{B}S}(x) \tag{9.28}$$

Y la corriente se obtiene simplemente dividiendo por R

$$i(x) = -\frac{v_x}{R}\frac{d}{dx}\Phi_{\vec{B}S}(x) \tag{9.29}$$

Reemplazando y operando obtenemos

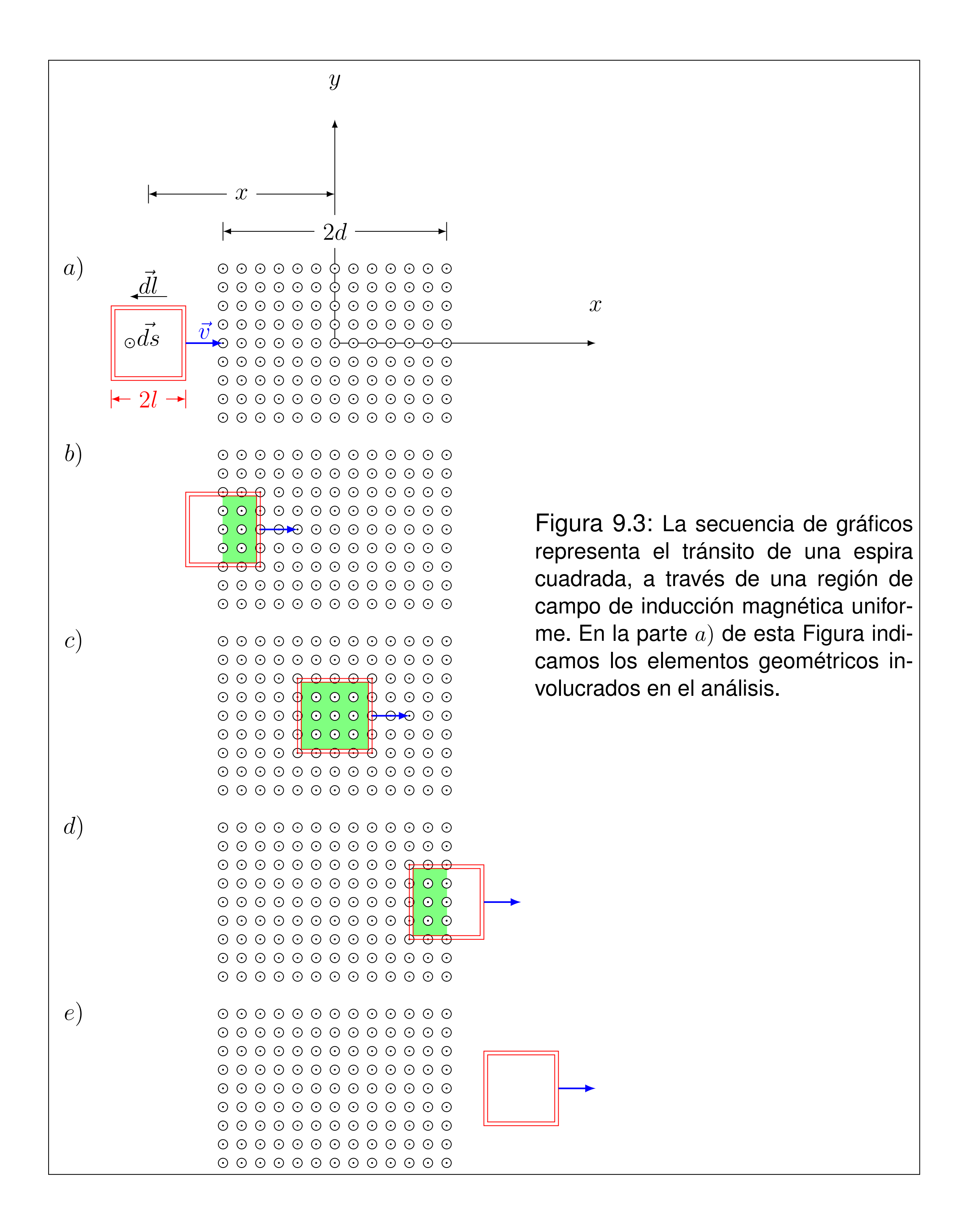


Figura 9.3: La secuencia de gráficos representa el tránsito de una espira cuadrada, a través de una región de campo de inducción magnética uniforme. En la parte $a)$ de esta Figura indicamos los elementos geométricos involucrados en el análisis.

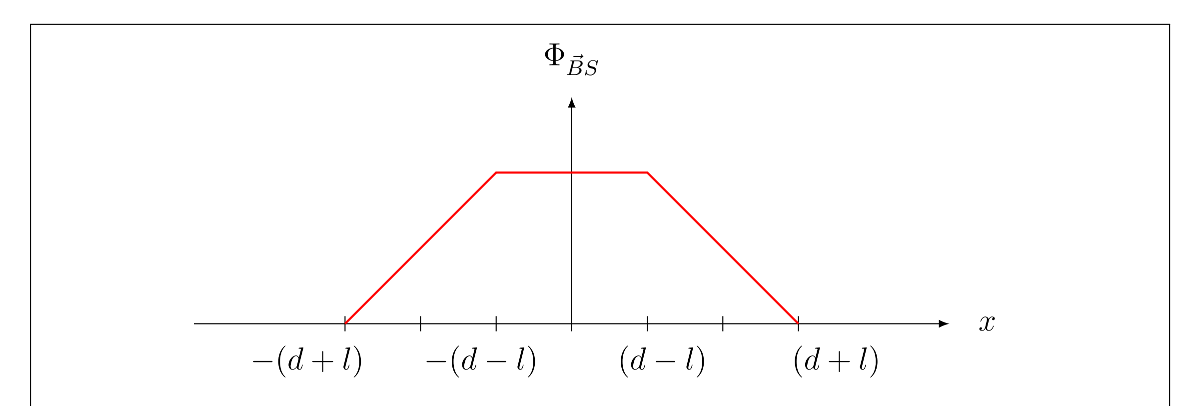


Figura 9.4: Con referencia a la figura anterior, el gráfico representa el flujo magnético que atraviesa la espira, como función de la posición de la misma.

$$i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -(d+l) \\ -\dfrac{2Blv_x}{R} & \text{si} \quad -(d+l) < x < -(d-l) \\ 0 & \text{si} \quad -(d-l) < x < (d-l) \\ \dfrac{2Blv_x}{R} & \text{si} \quad (d-l) < x < (d+l) \\ 0 & \text{si} \quad (d+l) < x \end{cases} \tag{9.30}$$

En la Figura 9.5 representamos la corriente i como función de la coordenada x. Observe la relación entre este gráfico y el anterior.

Los únicos tramos del recorrido en los que aparecen corrientes son los indicados por $b)$ y $d)$ en la secuencia de la Figura 9.3. Estos tramos coinciden con la entrada de la espira en la región de campo, y su posterior salida. La corriente durante la entrada es negativa, por lo que interpretamos que circula en sentido horario. Contrariamente en la salida la corriente circula en sentido antihorario. Como ya hemos visto, la energía disipada por efecto Joule en la espira debe ser aportada por un agente externo que realice trabajo para sostener el movimiento. Es interesante observar que durante la entrada de la espira (tramo $b)$), la fuerza magnética total sobre ella es la que opera sobre el lado derecho, donde la corriente circula hacia abajo. Utilizando la regla de la mano derecha, observamos que la fuerza magnética apunta hacia la izquierda. Observe que en la salida (tramo $d)$) la fuerza magnética apunta nuevamente hacia la izquierda, ya que la corriente es antihoraria, pero se involucra el lado izquierdo de la espira. Este simple razonamiento nos permite concluir que el agente externo debe hacer fuerza hacia la derecha en ambos tramos para mantener el movimiento.

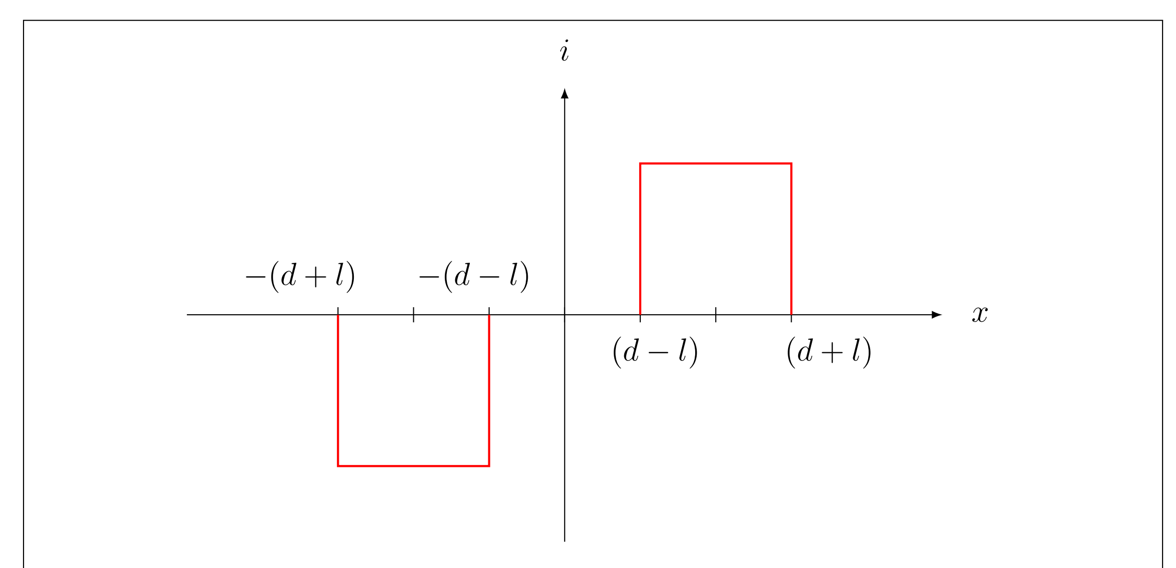


Figura 9.5: En relación con las figuras anteriores, el , gráfico representa la corriente a través de la espira como función de la posición de la misma.

9.6. Regla de Lenz

Demos otra vuelta de tuerca sobre el ejemplo anterior. Comencemos por centrar nuestra atención en el tramo $b)$ donde la corriente circula en sentido horario. Si pensamos que tal corriente es la fuente de un campo de inducción magnética adicional, es fácil observar que el flujo de dicho campo a través de la espira será negativo (flujo entrante)[2]. Si ahora observamos lo que ocurre en el tramo $d)$, encontramos que el flujo debido a la corriente es positivio (saliente) ¿Qué detalle comparten estos comportamientos? A riesgo de incurrir en una personificación de dudosa rigurosidad, nos permitimos atribuirle cierta “voluntad” a la espira. Podemos imaginar que su carácter es conservador, de modo que su respuesta ocurre en oposición a los cambios. Pero ¿qué tipo de cambios? Justamente, cambios en el flujo a través de ella. Si observamos cuidadosamente, vemos que, tanto en el tramo $b)$ como en el $d)$, la espira “produjo” corrientes que generaron flujos en “oposición” al cambio del flujo preexistente. En efecto, en el tramo $b)$ el flujo preexistente era saliente y su valor aumentaba. Entonces el flujo aportado por la corriente fue entrante, como un intento de evitar el cambio que estaba ocurriendo. En el tramo $d)$, el flujo preexistente era saliente pero disminuía. Entonces, para evitar tal disminución, la corriente en la espira circuló de modo tal que el flujo producido tendiera a “reforzar", apuntalando el estado previo.

Este modo de pensar, tal vez algo informal, es muy práctico y difundido, especialmente en ámbitos tecnológicos. El mismo recibe el nombre de **regla de**

[2]Si para el lector no fuera evidente, sugerimos el uso de la regla de la mano derecha.

Lenz, y constituye una excelente herramienta intuitiva para la determinación del sentido de circulación de la corriente. No obstante, es conveniente remarcar que la ley de Faraday tine un espectro muy abarcativo de fenómenos, en los que no siempre hay corrientes involucradas. Por tanto la regla de Lenz no es una ley general, al menos en el sentido informal que la definimos. Sin embargo, un intento de formalización no nos conduciría más que a la ley de Faraday tal y como ya la enunciamos. Algunos autores, atendiendo a un merecido homenaje, suelen refererirse a la ley de Faraday-Lenz.

9.7. Inducción mutua

Consideremos dos circuitos fijos a los que identificaremos por 1 y 2, tales que sean muy próximos entre sí. Cuando decimos fijos, entendemos que no varían ni sus formas ni las posiciones relativas entre ellos. Supongamos ahora que a lo largo del circuito 1 circula una corriente instantánea $i_1(t)$, que genera un campo de inducción magnética $\vec{B}_1(t)$. Este influye sobre el circuito 2, originando un flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_2}$ a través de una superficie S_2 limitada por la curva C_2 sobre la que se desarrolla dicho circuito.

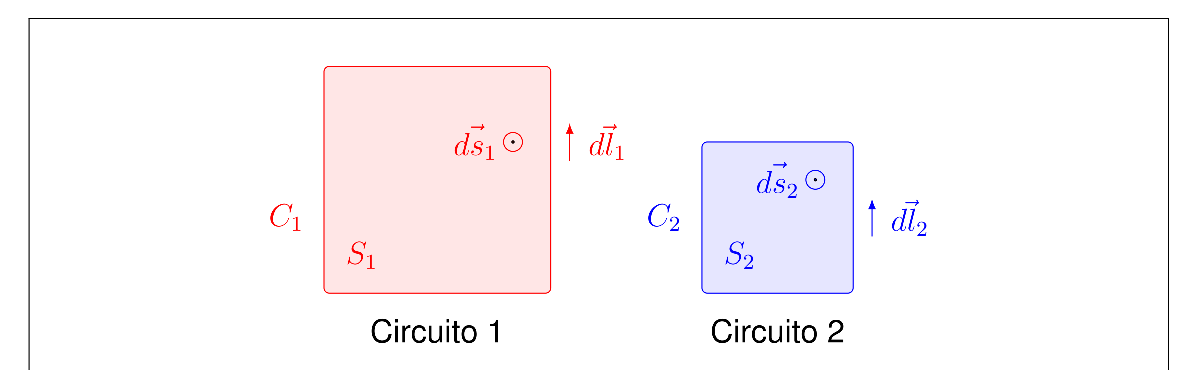


Figura 9.6: Esquema de dos circuitos genéricos en los que indicamos los elementos necesarios para definir el coeficiente de inducción mutua.

Supongamos además, que las variaciones temporales de i_1 son relativamente pequeñas, de modo que el campo $\vec{B}_1$ pueda aproximarse con la ley de Biot-Savart. Entonces en el instante t tenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2, t) \cdot \vec{ds}_2 \tag{9.31}$$

donde $\vec{r}_2$ representa los puntos de la superficie S_2, y $\vec{B}_1(\vec{r}_2, t)$ viene dado por la

ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{i_1(t)\, \vec{dl}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \,|^3} = \frac{\mu_0\, i_1(t)}{4\pi} \int_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \,|^3} \quad (9.32)$$

En esta expresión, las posiciones $\vec{r}_1$ representan los puntos de la curva C_1, sobre la que se desarrolla el circuito 1. Reemplazando (9.32) en (9.31) y operando obtenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \int_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \,|^3} \cdot \vec{ds}_2 \right] i_1(t) \quad (9.33)$$

donde $i_1(t)$ pudo extraerse de las integrales porque resulta independiente de la geometría sobre la que operan las integrales. En otras palabras, vista desde los dominios de integración, $i_1(t)$ es una constante. Ahora centremos la atención en la expresión entre corchetes (que por cierto, asusta). Observemos que la misma depende exclusivamente de la geometría de los circuitos que, por hipótesis, es fija. Entonces estamos en condiciones de asegurar que la expresión entre corchetes es una constante a la que llamaremos **coeficiente de inducción mutua** del montaje, y denotaremos por M:

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t)}{i_1(t)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \int_{C_1} \frac{\vec{dl}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\, \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \,|^3} \cdot \vec{ds}_2 \quad (9.34)$$

Aunque la definición de M tiene un aspecto muy desagradable, resulta reparador saber que rara vez se utiliza en forma tan cruda. Luego lo comprobaremos con un ejemplo. Lo que es verdaderamente significativo es la versatilidad operativa que aporta a la ley de Faraday, cuando la misma se aplica a la interacción entre circuitos. Supongamos que han sido debidamente elegidas las orientaciones de curvas y superficies en el montaje de los circuitos 1 y 2. Entonces, combinando la ley de Faraday con (9.34) tenemos

$$\epsilon_{21} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t) = -M \frac{d}{dt} i_1(t) \quad (9.35)$$

donde ϵ_{21} representa la f.e.m inducida sobre el circuito 2, debido a la variación temporal de la corriente que circula por 1.

Una propiedad sumamente útil puede demostrarse a partir de la reciprocidad del análisis anterior. Si hubiéramos considerado que la corriente circulaba por el

circuito 2 y estudiábamos su influencia sobre el 1, habríamos obtenido el mismo coeficiente M, esto es

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}(t)}{i_1(t)} = \frac{\Phi_{\vec{B}_2 S_1}(t)}{i_2(t)} \tag{9.36}$$

9.8. Ejemplo de cálculo

Consideremos un hilo conductor recto infinitamente largo. Una espira rectangular conductora, cuyos lados tienen longitudes a y b, se encuentra en el mismo plano que el hilo, de modo que sus lados menores sean paralelos al hilo. Supongamos además que la distancia del hilo al centro de la espira es c como se muestra en la Figura 9.7 ($c > a/2$).

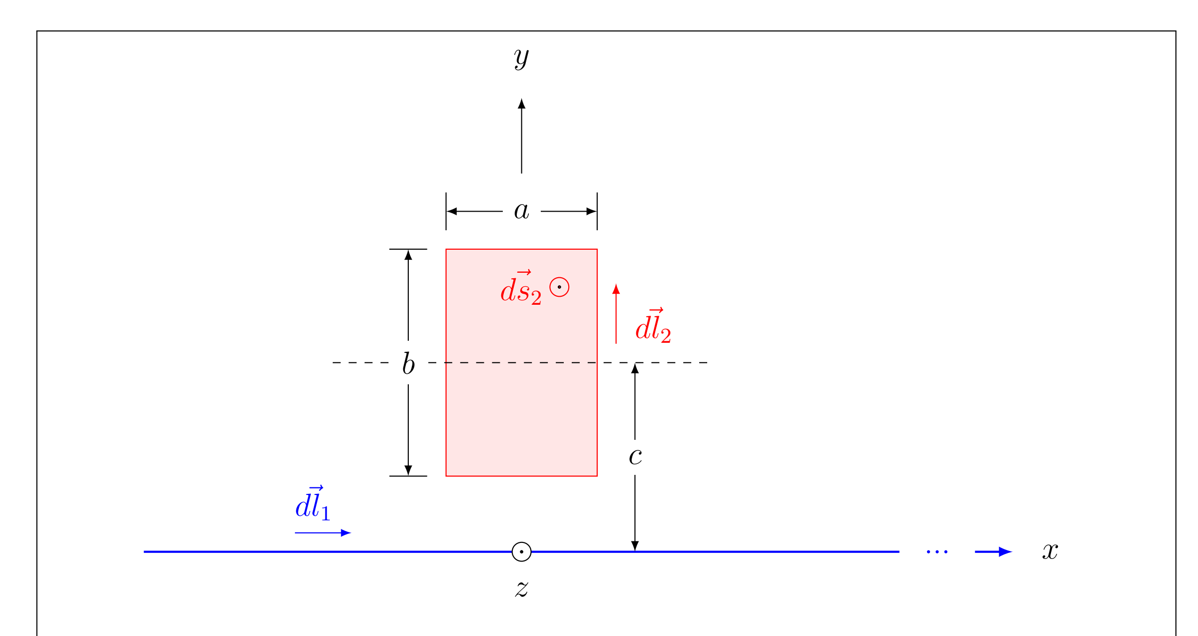


Figura 9.7: Esquema de un conductor recto infinitamente largo y una espira conductora rectangular. Ambos circuitos se encuentran en el mismo plano, y dos de los lados de la espira son paralelos al conductor infinito. En el esquema indicamos los elementos geométricos referidos en el análisis.

Nos proponemos determinar el coeficiente de inducción mutua del montaje, y la fuerza electromotriz inducida en la espira, cuando una corriente alterna de amplitud I_1 y frecuencia angular ω circula por el hilo infinito.

Para comenzar, elegimos el origen y los ejes de coordenadas como se indica en la Figura 9.7. Identificamos como circuito 1 al hilo y como circuito 2 a la es-

pira. Luego elegimos los sentidos de circulación sobre cada circuito, para tener claro el significado de los signos de fuerzas electromotrices y corrientes sobre los mismos. Como tenemos que utilizar el flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito 2, elegimos la superficie plana del rectángulo limitado por el circuito, y la orientamos consistentemente. Entonces la geometría ya está preparada.

Ahora tenemos que determinar el flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_2}$. Los vectores involucrados son

$$\vec{B}_1(\vec{r},t) = \frac{\mu_0\, i_1(t)}{2\pi y}\,\breve{k} \qquad \vec{ds}_2 = dx\,dy\,\breve{k} \tag{9.37}$$

Entonces el flujo es

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \int_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r},t)\cdot\vec{ds}_2 = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{c-b/2}^{c+b/2} \frac{\mu_0\, i_1(t)}{2\pi y}\,\breve{k}\cdot dx\,dy\,\breve{k} \tag{9.38}$$

El producto de los versores es la unidad. Luego tenemos

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \frac{\mu_0\, i_1(t)}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{c-b/2}^{c+b/2}\frac{dy}{y} \tag{9.39}$$

Las integrales son inmediatas, con lo que concluimos que el flujo es

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_2} = \frac{\mu_0 a\, i_1(t)}{2\pi}\, ln\left(\frac{c+b/2}{c-b/2}\right) \tag{9.40}$$

Ahora, el coeficiente de inducción mutua se obtiene muy fácilmente

$$M = \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_2}}{i_1(t)} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\, ln\left(\frac{c+b/2}{c-b/2}\right) \tag{9.41}$$

El estudiante podría pensar que hemos tenido mucha suerte en que la corriente se pudiera simplificar con tanta facilidad. Sin embargo, esto debe ocurrir cualquiera sea la complejidad del montaje. Esto se debe a que siempre existirá (según hemos demostrado) una relación lineal entre flujo y corriente.

Para determinar la fuerza electromotriz inducida utilizamos la forma compacta derivada de la ley de Faraday.

$$\epsilon \; = \; -M \, \frac{d}{dt} \, i_1 \, (t) \; = \; - \, \frac{\mu_0 a}{2\pi} \; ln \left(\frac{c + b/2}{c - b/2} \right) \; \frac{d}{dt} \left[\, I_1 \, \sin \left(\omega t + \phi \right) \right] \tag{9.42}$$

Entonces

$$\epsilon \; = \; - \, \frac{\mu_0 a I_1 \omega}{2\pi} \; ln \left(\frac{c + b/2}{c - b/2} \right) \; \cos \left(\omega t + \phi \right) \tag{9.43}$$

9.9. Autoinducción

Siguiendo lineamientos análogos a los que conducen al concepto de inducción mutua, podemos establecer una relación entre el flujo que atraviesa la superficie limitada por el circuito 1, originado por la corriente $i_1(t)$ que circula por él. Para ello consideremos un circuito fijo sobre la curva C_1 y una de las superficies limitadas por dicha curva, a la que llamaremos S_1. La corriente $i_1(t)$ dará lugar a un campo de inducción magnética $\vec{B}_1(t)$, y este a un flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t)$ a través de S_1. Entonces, definimos el coeficiente de autoinducción L del circuito, como

$$L \; = \; \frac{\Phi_{\vec{B}_1 S_1} \, (t)}{i_1 \, (t)} \tag{9.44}$$

Esta expresión es análoga a la (9.34), aunque ha sido voluntariamente omitida la definición constructiva ¿por qué? Simplemente porque el modelo que representa un circuito como contenido en una curva cerrada colapsa en el intento de calcular la autoinducción. En efecto, el flujo $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}$ va a infinito en este modelo, en contra de la observación experimental que da cuenta de un coeficiente de autoinducción siempre finito. Aquí nuevamente planteamos un enérgico alerta acerca de la representatividad de los modelos, recordando que los mismos son caricaturas de la realidad, por lo que la interpretación queda a cargo de quien lo utiliza.

Pero entonces, ¿qué modelo podemos usar? En principio, la restricción solo pesa sobre representaciones lineales de conductores con corriente. Ya una representación superficial de la corriente puede utilizarse. Por supuesto, siempre podrá modelarse la corriente sobre un sustrato volumétrico.

Por último, tratamos la fuerza electromotriz autoinducida ϵ_{11} en el circuito, a partir de las variaciones temporales de la corriente $i_1(t)$ que circula por él. Supongamos que las reglas geométricas han sido debidamente respetadas para poder aplicar la ley de Faraday. Entonces tenemos

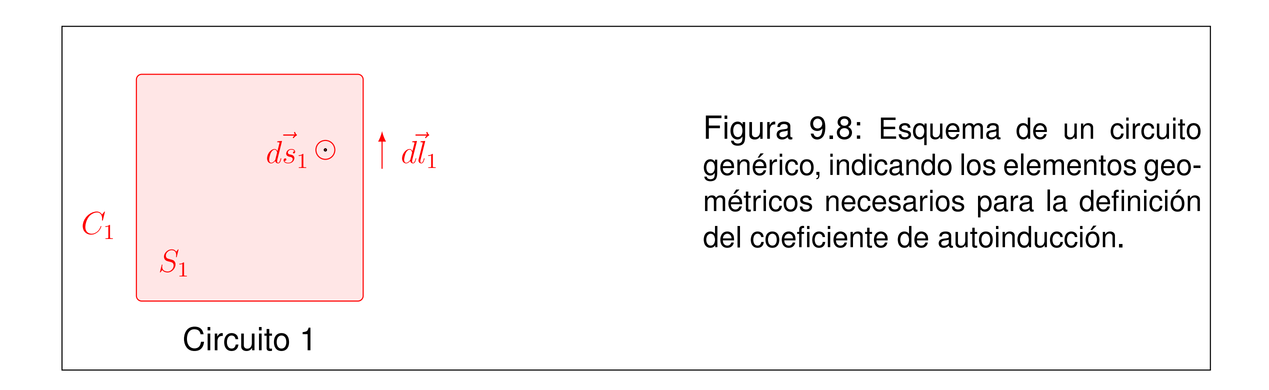


Figura 9.8: Esquema de un circuito genérico, indicando los elementos geométricos necesarios para la definición del coeficiente de autoinducción.

$$\epsilon_{11} = -\frac{d}{dt}\Phi_{\vec{B}_1 S_1}(t) = -L\frac{d}{dt}i_1(t) \tag{9.45}$$

La tecnología ha requerido la creación de objetos compactos de gran autoinducción, a los que se denomina **inductores**. El uso llevó a la necesidad de una unidad para los coeficientes M y L. La misma se llama **Henrio** y se representa por H. Su relación con las unidades previas es

$$\mathsf{H} = \frac{\mathsf{T\,m^2}}{\mathsf{A}} = \frac{\mathsf{V\,s}}{\mathsf{A}} = \Omega\,\mathsf{s} = \frac{\mathsf{s^2}}{\mathsf{F}} \tag{9.46}$$

Para concluir este tratamiento, es importante resaltar el valor de la expresión (9.45), y su análoga (9.35). Ambas proporcionan una forma compacta de representar la influencia de elementos inductivos en circuitos. Como veremos más adelante, los inductores tienen un gran protagonismo en cuestiones tecnológicas muy diversas.

9.10. Ejemplo: Autoinducción de un solenoide

Como ejemplo, desarrollemos el cálculo de la autoinducción de un solenoide de radio R y longitud l, formado por N espiras muy apretadas (ver Figura 9.9).

Según hemos tratado anteriormente, el campo de inducción magnética producido por un solenoide cuya longitud es bastante mayor que su radio, puede aproximarse como uniforme dentro de su volumen y nulo afuera. En la región interior viene dado por

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1(t)\,N}{l}\,\breve{\imath} \tag{9.47}$$

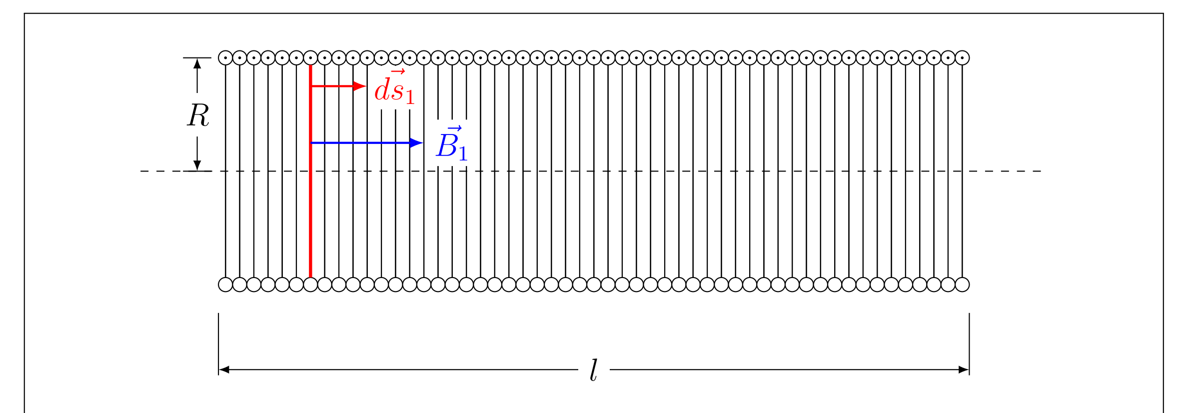


Figura 9.9: Esquema de un solenoide donde indicamos los elementos geométricos involucrados en la determinación de su autoinducción.

donde $i_1(t)$ representa la corriente que circula por el solenoide, y hemos asumido que el eje x positivo corre hacia la derecha a lo largo del eje de simetría.

Para determinar el flujo magnético $\Phi_{\vec{B}_1 S_1}$, observemos que la superficie involucrada proviene de unir las N superficies circulares limitadas respectivamente por las N espiras. Llamaremos S_e a la superficie limitada por cada espira. Como el campo $\vec{B}_1$ es uniforme dentro del solenoide, tenemos que

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_1} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{ds}_1 = N \int_{S_e} \frac{\mu_0 i_1(t) N}{l} \breve{\imath} \cdot ds_1 \breve{\imath} = \frac{\mu_0 i_1(t) N^2}{l} \int_{S_e} ds_1 \quad (9.48)$$

la integral remanente no es más que el área de la superficie limitada por una de las espiras. Entonces

$$\Phi_{\vec{B}_1 S_1} = \frac{\mu_0 i_1(t) N^2 \pi R^2}{l} \quad (9.49)$$

Por último, determinamos el coeficiente de autoinducción L. Como era de esperarse, el flujo magnético resultó lineal con la corriente, por lo que L se obtiene muy sencillamente

$$L = \frac{\pi \mu_0 N^2 R^2}{l} \quad (9.50)$$

Observemos que el coeficiente de autoinducción depende exclusivamente de magnitudes geométricas, y de la constante μ_0. Esta última refiere a que el campo de inducción magnética involucrado se desarrolla en el vacío.

9.11. Problemas

1. Determine el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud para los siguientes casos:

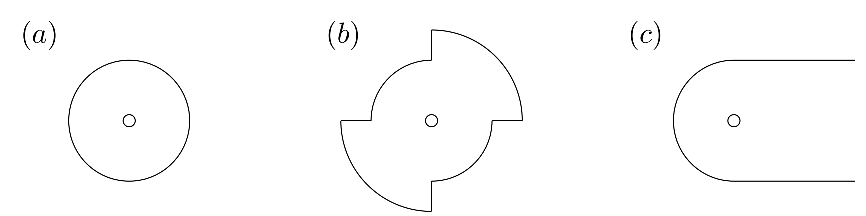
    a) Un solenoide infinitamente largo de radio R y n espiras por unidad de longitud.

    b) Un coaxil infinitamente largo formado por dos tubos cilíndricos de espesor despreciable y radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) (Suponga que la corriente circula a lo largo del tubo interno en un sentido y por el tubo externo en sentido contrario).

    c) Un coaxil infinitamente largo formado por un cilindro macizo de radio R_1 y un tubo hueco de espesor despreciable y radio R_2 (Suponga que cuando la corriente circula por el conductor macizo, lo hace uniformemente distribuida).

2. Un cable coaxil de 10 m de longitud está compuesto por un conductor cilíndrico macizo de radio $a = 0,5$ mm, rodeado por un conductor cilíndrico hueco de radios $b = 2$ mm y $c = 2,2$ mm. Suponga que ambos conductores se encuentran conectados en sus extremos formando un circuito. Calcule la autoinducción del montaje, especificando las aproximaciones utilizadas.

3. En la figura siguiente se muestran varias situaciones con dos circuitos. En todos los casos, determine el coeficiente de inducción mutua M del montaje, suponiendo que los radios mayores son de 30 cm, los intermedios de 20 cm y los pequeños de 2 cm[3].



4. Considere un hilo conductor recto infinitamente largo, por el que circula una corriente constante $I = 1,5$ A. Una espira rectangular de lados $a = 10$ cm y $b = 20$ cm se encuentra en el mismo plano que el hilo, de modo que sus lados menores son paralelos al hilo. Suponga además que la distancia del hilo al centro de la espira es $c = 20$ cm (Ver figura).

    a) Determine el flujo magnético a través de la espira[4].

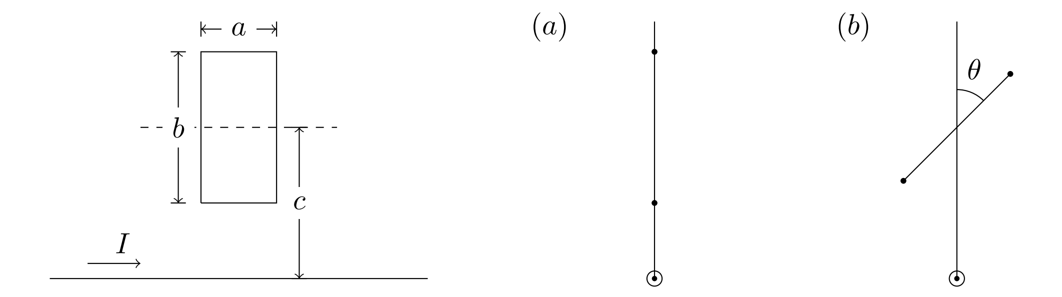
[3] Como ayuda metodológica, observe que puede suponer (sin que el enunciado lo proponga) que por un circuito circula una corriente y produce un flujo magnético a través del otro.

[4] Con el fin de facilitar tratamientos posteriores remitidos a los resultados de este montaje, proponemos que usted obtenga expresiones generales en términos de las magnitudes a, b, c, I y θ.

b) Si la espira rota un ángulo $\theta = 60^o$ alrededor del eje de trazos ¿Cuál será el flujo a través de ella?

c) ¿Para qué ángulo resultará que el flujo sea nulo?

d) Determine en cada caso el coeficiente de inducción mutua.



5. *a*) Dibuje una curva cerrada en el plano del papel y determine el signo de la fem inducida en los siguientes casos:

   1) Cuando $\vec{B}$ es entrante en el papel y se atenúa con el tiempo.
   2) Cuando $\vec{B}$ es saliente del papel y se atenúa con el tiempo.
   3) Cuando $\vec{B}$ es entrante en el papel y aumenta con el tiempo.
   4) Cuando $\vec{B}$ es saliente del papel y aumenta con el tiempo.

   b) Si sobre la curva hubiera un hilo conductor, en cada uno de los casos anteriores circularía una corriente. Determine en cada caso el sentido de circulación de la corriente y el sentido del flujo magnético que la misma aportaría en la superficie contorneada por el circuito.

   c) Discuta la relación entre la variación del flujo que da origen a la corriente y el sentido del flujo con que responde el sistema. Trate de construir una regla general.

   d) ¿Qué ocurriría si la ley de Faraday no tuviera el signo negativo? Discuta observando cualquiera de las situaciones anteriores ¿Observa algo en contra de algún principio fundamental de la Naturaleza?

6. En cierta región del espacio existe un campo de inducción magnética uniforme $\vec{B}_0$. Una varilla conductora se traslada con velocidad constante $\vec{V}_0$, de modo que la varilla, el vector campo magnético y el vector velocidad son mutuamente perpendiculares. En los extremos de la varilla se observan acumulaciones de cargas de signos opuestos.

   a) Construya un diagrama indicando la orientación de la varilla, los vectores $\vec{B}_0$ y $\vec{V}_0$, y el tipo de carga de cada extremo ¿Por qué ocurre este fenómeno?

   b) ¿Qué fuerza debe hacer un agente externo para mantener el movimiento?

7. Dos espiras circulares concéntricas están en el mismo plano. Si en la espira exterior circula una corriente en sentido horario que aumenta con el tiempo, ¿cuál de las siguientes opciones describe correctamente la corriente inducida en la espira interior?

   a) Circula en sentido antihorario.

   b) Es nula.

   c) Circula en sentido horario.

   d) Circula en un sentido que depende de la razón de los radios de las espiras.

8. Considere una espira circular fija de radio $a = 20$ cm, por la que circula una corriente constante de intensidad $I = 0,25$ A. Una segunda espira circular de radio $b = 1$ cm y resistencia $R = 0,5\ \Omega$, se mueve de modo que su centro viaja con rapidez $v = 4$ m/s (constante) a lo largo del eje de simetría de la primera espira; además los planos que contienen a ambas espiras permanecen siempre paralelos.

   a) Determine la fuerza electromotriz inducida, la potencia disipada y la fuerza realizada por el agente externo como funciones del tiempo.

   b) ¿Cuál será el máximo valor de fuerza electromotriz inducida que se observará?

9. Un bobinado de 2000 vueltas muy apretadas, ha sido devanado sobre una llanta de bicicleta (hecha de aluminio) cuyo radio es $a = 35$ cm. La llanta se ha montado de modo que puede hacerse girar alrededor de uno de sus diámetros, orientado en dirección $este - oeste$. Completando el circuito, los extremos del bobinado se han unido a una pequeña lámpara que requiere una tensión de 1.5 V para encender plenamente. Sabiendo que el módulo de la inducción magnética terrestre en la ciudad de La Plata es $B = 0,3$ G.

   a) Determine la frecuecia con que debe hacerse girar el montaje para que encienda la lámpara.

   b) Describa cualitativamente la intensidad de la lámpara como función del tiempo.

10. Un conductor infinitamente largo y una espira rectangular de resistencia $R = 20\,\Omega$, se montan en un mismo plano (suponga que el montaje y las dimensiones son los mismos que en el problema 4.a)). Calcule la corriente que circulará por la espira, cuando por el hilo circula una corriente alterna con una amplitud de 1 A y una frecuencia de 50 Hz.

11. Considere dos espiras rectangulares coplanares, con centros coincidentes y lados mayores paralelos. Los lados de la primera miden $a = 6$ cm y $b = 120$ cm, y los de la segunda $c = 4$ cm y $d = 8$ cm.

a) Determine aproximadamente el coeficiente de inducción mutua del sistema.

b) Calcule la corriente que circulará por la espira mayor como función del tiempo, cuando circula por la espira menor una corriente dada por

$$I(t) = I_0 \ \sin(\omega t)$$

con $I_0 = 1,2$ A y $\omega = 2\pi \times 10^2$ s^{-1}.

12. Considere dos espiras circulares de radios respectivos $a = 30$ cm y $b = 1$ cm, montadas concéntricamente sobre un mismo plano.

    a) Determine el flujo magnético a través de la espira pequeña, cuando circula una corriente de 0.1 A sobre la espira mayor.

    b) Determine el coeficiente de inducción mutua del montaje.

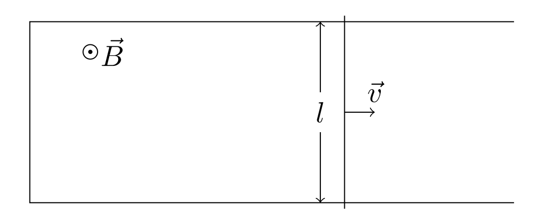
    c) Suponga ahora que sobre la espira pequeña circula una corriente alterna cuya amplitud es 0.2 A, mientras que su frecuencia es 120 Hz. Suponiendo que la resistencia de la espira grande es $R_a = 50\ \Omega$, determine la corriente sobre ella como función del tiempo.

13. Una horquilla conductora horizontal de resistencia despreciable, está formada por dos rieles paralelos, separados una distancia $l = 10,8$ cm y conectados por un puente en uno de sus extremos (ver figura). Sobre la horquilla se desliza una barra de resistencia $R = 415$ mΩ libre de fricción, manteniendo una rapidez constante $V = 4,86$ m/s en dirección paralela a los rieles y en el sentido en que se aleja del puente. Todo el montaje se encuentra inmerso en un campo de inducción magnética uniforme de intensidad $B = 1,18$ T, perpendicular al plano de la horquilla.

    a) Determine la fuerza electromotriz inducida y la corriente sobre el circuito, indicando el sentido de circulación.

    b) ¿Qué fuerza debe realizar un agente externo para mantener el movimiento?

    c) ¿Cuál será la potencia convertida en energía térmica en la barra?



14. Considere nuevamente el montaje anterior, pero suponga ahora que el campo de inducción magnética es aportado por una corriente de 4 A, que circula por un conductor recto muy largo, contenido en el plano de la horquilla y situado paralelamente a los rieles, a 5 cm de uno de ellos. Repita el análisis propuesto en los apartados del problema anterior.

15. Una bobina cuadrada de lado $l = 20$ cm y 400 espiras, se encuentra inmersa en un campo de inducción magnética uniforme de intensidad $B = 5$ mT. Dicha bobina gira con frecuencia constante $f = 150$ Hz alrededor de un eje que pasa por dos de sus vértices opuestos. Suponga que el campo de inducción magnética es perpendicular al eje de giro.

    a) Determine la f.e.m. inducida en la bobina como función del tiempo.

    b) Determine la potencia media que debe suministrarse para mantener la rotación, si la resistencia de la bobina es $R = 50\,\Omega$.

Capítulo 10
Circuitos elementales

10.1. Introducción

Resulta sumamente dificil dar una definición formal en relación con los circuitos eléctricos, debido a la enorme diversidad de objetos tecnológicos que se alínean bajo esta denominación. Por tanto, es conveniente brindar una aproximación conceptual más intuitiva que formal. Para ello diremos que la tecnología nos provee de dispositivos cuyo funcionamiento requieren una **conexión eléctrica**. Diremos entonces que un **circuito** es un conjunto de dispositivos y conexiones, cuando los mismos forman una unidad funcional. Como vemos, esto es más bien una caracterización que una definición, cuya única virtud radica en su generalidad aunque prácticamente carece de contenido.

Nosotros centraremos nuesta atención en lo que daremos en llamar **circuitos elementales**. Pero, ¿a qué llamaremos circuito elemental? Bueno, simplemente diremos que se trata de una unidad funcional en que se conectan componentes básicos mediante cables. En nuesto caso, los componentes básicos son fuentes de tensión continua o alterna, resistores, capacitores e inductores. Cada uno de estos dispositivos han sido tratados en capítulos anteriores, y ahora serán utilizados bajo la simbología que se detalla en la Figura 10.1.

Todos estos elementos serán considerados **ideales**, esto es, que las únicas magnitudes significativas del objeto son las que se indican al lado del símbolo[1].

En los gráficos de circuitos, los componentes se vinculan mediante líneas que representan conductores ideales (es decir, libres de resistencia). Por último, diremos que el circuito puede tener elementos de comando. En nuestros circuitos solo encontraremos interruptores y conmutadores, cuyos símbolos son los que

[1] Los componentes reales suelen tener más especificaciones. Las baterías poseen una resistencia interna. Los inductores también presentan resistencia. Además, todos los dispositivos traen especificado el régimen de funcionamiento que admiten (tensiones, corrientes o cargas máximas admitidas). En diseños reales, todos estos parámentros deben ser tenidos en cuenta.

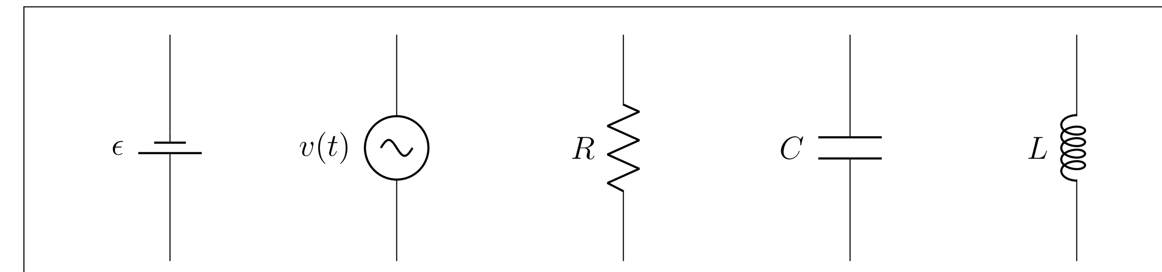


Figura 10.1: Componentes que formarán parte de un circuito elemental, de izquierda a derecha: pila o batería caracterizada por una diferencia de potencial ϵ, fuente de tensión alterna cuya tensión $v(t)$ varía con el tiempo, resistor de resistencia R, capacitor cuya capacidad es C, inductor de autoinductancia L.

presentamos en la Figura 10.2.

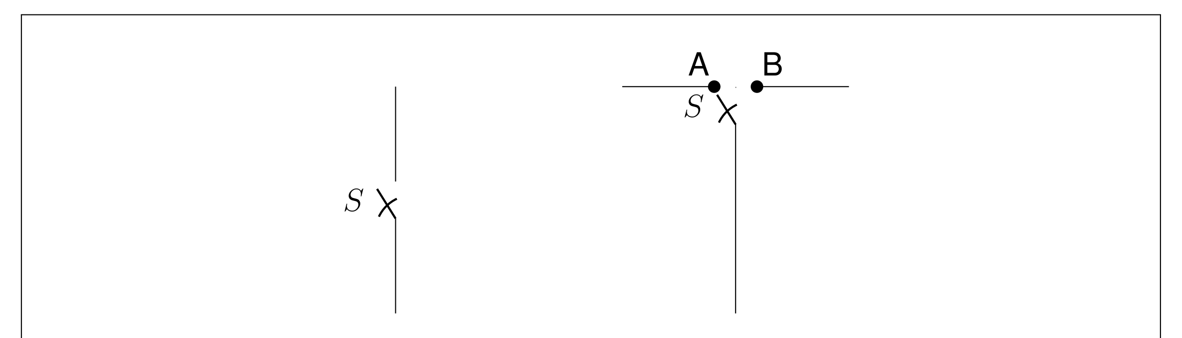


Figura 10.2: Elementos de comando de un circuito. Izquierda: interruptor. Derecha: conmutador.

10.2. Aspectos topológicos

Los circuitos elementales que trataremos en este capítulo admiten ser representados en el plano mediante la simbología introducida en la sección 10.1. Ahora incorporamos la terminología necesaria para tratar las formas de conexión posibles. En primer lugar, representamos un circuito en sentido genérico, donde los cuadrados vacíos pueden ser reemplazados por cualquier componente (ver Figura 10.3).

Las definiciones que daremos a continuación son de carácter general, en el sentido que pueden aplicarse a cualquier circuito. Por tanto, es indispensable familiarizarse con este lenguaje, para luego comprender una serie de reglas muy prácticas vinculadas a la resolución de problemas.

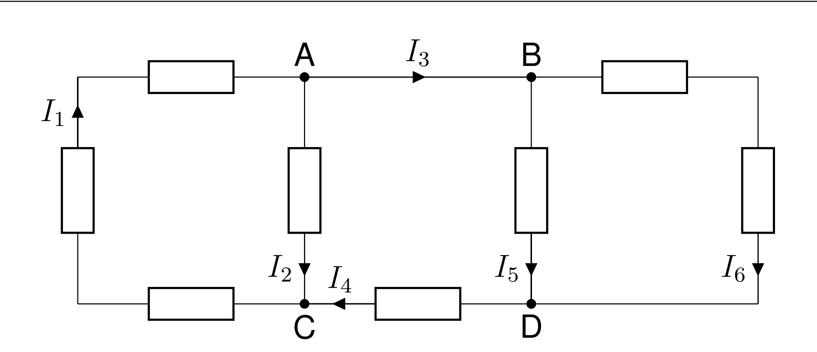


Figura 10.3: Circuito genérico: las cajas representan los **componentes** presentes en el circuito, fuentes, resistores, capacitores o inductores; los puntos **A**, **B**, **C** y **D** indicados en la intersección de tres conductores son los **nodos**; sobre cada **rama** del circuito se ha representado la **corriente** que circula por la misma con una orientación que señala el sentido elegido como positivo.

Nodo: Es cualquier punto del circuito en que se vinculan al menos tres conductores. En el circuito de la Figura 10.3 son los puntos A, B, C, D. El número total de nodos de un circuito lo denotamos por N_n. Entonces en el ejemplo tenemos $N_n = 4$.

Rama: Es cualquier tramo de un circuito que se inicia en un nodo y termina en otro, sin contener ningún nodo intermedio. En la Figura 10.3 tenemos dos ramas que vinculan los nodos A y B. El número total de ramas del circuito lo denotamos por N_r, y en el ejemplo tenemos $N_r = 6$. Note que una rama puede tener varios dispositivos conectados, aunque también puede ocurrir que sea simplemente un cable.

Malla: Es cualquier camino cerrado que pueda establecerse en un circuito, tal que al recorrerlo, no se pase dos veces por un mismo nodo. En la Figura 10.3 podemos reconocer seis mallas.

Provincia: Este término es de uso exclusivo en el curso, por lo que sugerimos que siempre que se utilice en otro contexto, se explique su significado. Si a un circuito plano se lo identifica como un mapa de país con división política, pueden identificarse “fronteras” de provincias. Nosotros llamaremos provincia a la malla que representa la frontera de una provincia. El número de provincias de un circuito lo identificamos por N_p. En el ejemplo de la Figura 10.3 tenemos $N_p = 3$.

Propiedad topológica: En un circuito que admite representación plana, el número de ramas coincide con la suma del número de provincias y de nodos menos uno.

$$N_r = N_p + N_n - 1 \tag{10.1}$$

Dejamos a cargo del estudiante que verifique que el ejemplo cumple con esta regla topológica.

10.3. Reglas de Kirchhoff

Hasta este punto, hemos presentado solo simbología circuital y cuestiones terminológicas. Ahora comenzamos con el tratamiento físico de los circuitos elementales. Para ello, comencemos por observar que en cada rama de un circuito habrá una única corriente (magnitud escalar) que requiere identificación consistente con la rama. Además debemos elegir un sentido de circulación que indique hacia dónde va la corriente cuando su valor es positivo. Volviendo al ejemplo de la Figura 10.3, observemos en el gráfico que han sido elegidas las notaciones para las corrientes y sus respectivos sentidos.

Los circuitos siempre pueden entenderse como una red en que cada tramo de conductor posee un potencial instantáneamente uniforme. Por su parte, cada dispositivo se inserta aportando una diferencia de potencial que depende de su naturaleza física. En algunos componentes, la diferencia de potencial entre sus terminales depende del sentido de la corriente (resistores e inductores). Para que no queden dudas en relación con los signos, en el Cuadro 10.1 incorporamos notaciones consistentes con las relaciones que se detallan a continuación.

Note que la diferencia de potencial del capacitor tiene indicado con un asterisco la cara en que reside la carga considerada (ver Cuadro 10.1). Ahora estamos en condiciones de enunciar las **reglas de Kirchhoff**:

Regla de mallas: En cualquier malla, la suma orientada de las diferencias de potencial medidas entre terminales de los dispositivos que la componen debe ser nula.

Regla de nodos: En cualquier nodo, la suma de las corrientes que circulan por los conductores que se vinculan en el nodo debe ser nula.

Estas reglas se pueden deducir con facilidad a partir del teorema de trabajo y energía y de la ecuación de continuidad de la carga, respectivamente.

DIFERENCIAS DE POTENCIAL		
Componente	Símbolo	Tensión en los bornes
Pila	ϵ A B	$V_B - V_A = -\epsilon$
Fuente de tensión alterna	V A B	$V_B - V_A = V_F \sin(\omega t)$
Capacitor	C * A B	$V_B - V_A = \frac{Q^*}{C}$
Resistor	R I A B	$V_B - V_A = -IR$
Inductor	L i A B	$V_B - V_A = -L\frac{di}{dt}$

Cuadro 10.1: Diferencias de potencial asociadas a los distintos componentes de un circuito.

10.4. Regímenes transitorio y estacionario

Según hemos anticipado, los circuitos elementales pueden tener elementos de comando como interruptores y conmutadores. Cada vez que se opera alguno de estos elementos, el circuito experimenta cambios en sus corrientes y en otras magnitudes relacionadas. Estos cambios, en general, no son instantáneos. Si al momento de operar el interruptor (o conmutador) lo identificamos como el ini-

cio del conteo de tiempos, observamos que en un lapso relativamente corto se presentan fluctuaciones temporales importantes en las corrientes, en las cargas de capacitores, en las energías almacenadas en inductores, etc. Si este proceso tiende a la estabilización de las magnitudes, decimos que el mismo es un **proceso transitorio**, o que el circuito se encuentra en **régimen transitorio**. Si a posteriori, las magnitudes afectadas dejan de variar, decimos que el circuito alcanzó el **régimen estacionario**. El término “estacionario" suele utilizarse como sinónimo de “independiente del tiempo" aunque, en determinadas circunstancias, no conviene aferrarse mucho a esta asociación terminológica. En este curso veremos algunos ejemplos en que el término se usa para denotar conductas repetitivas o localizadas, que no implican invariancia temporal.

En primer lugar trataremos los circuitos elementales en régimen estacionario. Luego abordaremos algunos casos simples de procesos transitorios.

10.5. Régimen estacionario

En esta sección presentaremos algunas reglas prácticas que pueden aplicarse *cuando el circuito alcanza el régimen estacionario*. Si el circuito contiene fuentes de tensión alterna, no podrá alcanzar el régimen estacionario (al menos en el sentido de la independencia temporal de las corrientes). Pospondremos el tratamiento de estos circuitos para el capítulo siguiente, donde discutiremos un significado ampliado del término “estacionario”. Hecha esta salvedad, las reglas son las siguientes:

- Si una rama contiene un capacitor, la corriente en la rama es nula, y el capacitor estará cargado con una diferencia de potencial compatible con su entorno circuital. Entonces almacenará energía en el campo eléctrico de acuerdo con

$$U_C = \frac{1}{2} C \left(\Delta V\right)^2 \tag{10.2}$$

- Si una rama contiene un inductor, la corriente a lo largo de dicha rama será la misma que si el inductor se reemplazara por un conductor ideal. El inductor almacenará energía en el campo de inducción magnética de acuerdo con

$$U_L = \frac{1}{2} L I^2 \tag{10.3}$$

Estas dos reglas permiten la simplificación de los circuitos, de modo que al momento de encontrar las corrientes, solo habrá pilas y resistores. Una vez reducido el circuito a su formato más simple, podemos aplicar la siguiente regla topológica:

- La cantidad de corrientes (incógnitas) será siempre igual al número de ramas. Para evitar inconvenientes relacionados con la dependencia lineal de las ecuaciones, *debemos utilizar tantas ecuaciones de mallas como provincias tenga el circuito, y tantas ecuaciones de nodos como el número de nodos menos uno.*

Ilustramos con un ejemplo. En la Figura 10.4 observamos que el circuito tiene tres ramas, dos provincias y dos nodos. Por tanto tenemos tres corrientes (incógnitas) y necesitamos tres ecuaciones linealmente independientes. Entonces debemos plantear dos ecuaciones de mallas y una ecuación de nodos. Notemos que en la Figura 10.4 han sido elegidos los sentidos de circulación en que las corrientes serán consideradas positivas. Para constuir las ecuaciones, elegimos las mallas que coinciden con los contornos de las dos provincias, y el nodo superior.

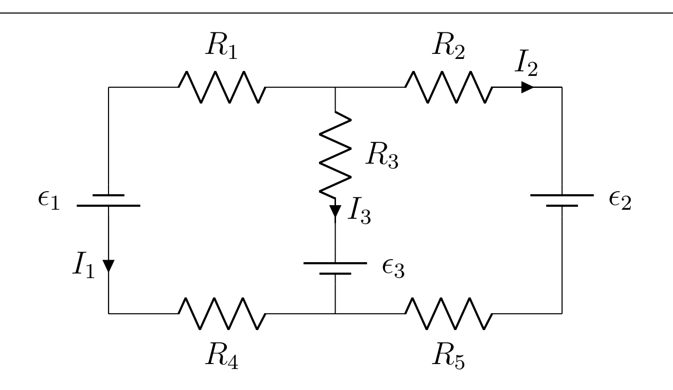


Figura 10.4: Ejemplo de un circuito con fuentes de tensión continua en régimen estacionario: en cada rama se ha indicado el sentido que se asignará como positivo a las corrientes.

$$\begin{cases} \epsilon_1 - R_1 I_1 + R_3 I_3 + \epsilon_3 - R_4 I_1 = 0 \\ -\epsilon_3 - R_3 I_3 + R_2 I_2 + \epsilon_2 + R_5 I_2 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \tag{10.4}$$

Reordenando, nos queda el siguiente sistema lineal inhomogéneo.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (R_1+R_4)\ I_1 \ -\ R_3 I_3 & = & \epsilon_1 \ +\ \epsilon_3 \\ (R_2+R_5)\ I_2 \ -\ R_3 I_3 & = & \epsilon_3 \ -\ \epsilon_2 \\ I_1 \ +\ I_2 \ +\ I_3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{10.5}$$

cuya solución puede obtenerse resolviendo los siguientes determinantes (entre otros tantos métodos). Definimos el determinante del sistema Δ como

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc} (R_1+R_4) & 0 & -R_3 \\ 0 & (R_2+R_5) & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \tag{10.6}$$

y obtenemos para las corrientes

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{ccc} (\epsilon_1+\epsilon_3) & 0 & -R_3 \\ (\epsilon_3-\epsilon_2) & (R_2+R_5) & -R_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \\ I_2 &= \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{ccc} (R_1+R_4) & (\epsilon_1+\epsilon_3) & -R_3 \\ 0 & (\epsilon_3-\epsilon_2) & -R_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \\ I_3 &= \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{ccc} (R_1+R_4) & 0 & (\epsilon_1+\epsilon_3) \\ 0 & (R_2+R_5) & -R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \end{aligned} \tag{10.7}$$

Operando cuidadosamente tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(\epsilon_1+\epsilon_3)(R_2+R_3+R_5)-(\epsilon_3-\epsilon_2)\ R_3}{(R_1+R_4)(R_2+R_5)+R_3\ (R_1+R_2+R_4+R_5)} \\ I_2 &= \frac{(\epsilon_3-\epsilon_2)(R_1+R_3+R_4)-(\epsilon_1+\epsilon_3)\ R_3}{(R_1+R_4)(R_2+R_5)+R_3\ (R_1+R_2+R_4+R_5)} \\ I_3 &= \frac{-(\epsilon_1+\epsilon_3)(R_2+R_5)-(\epsilon_3-\epsilon_2)(R_1+R_4)}{(R_1+R_4)(R_2+R_5)+R_3\ (R_1+R_2+R_4+R_5)} \end{aligned} \tag{10.8}$$

Esta resolución es verdaderamente simple. Pero a menudo ocurren dos tipos

de errores. El primero consiste en equivocar signos al momento de plantear las ecuaciones. El segundo surge de cuestiones numéricas debidas a la abundancia de cuentas. Lo único que podemos sugerir al respecto, es que tanto el planteo como el cálculo se hagan con sumo cuidado, y que posteriormente se reemplace el resultado en las ecuaciones como método de control.

10.6. Carga y descarga de capacitores

El tratamiento de circuitos en régimen transitorio siempre presenta un grado mayor de complejidad matemática, ya que las reglas de Kirchhoff desembocan en ecuaciones diferenciales acopladas. En general, estos tratamientos exceden los objetivos de este curso. Sin embargo, algunas situaciones muy simples pueden tratarse. Tal es el caso de la carga y descarga de capacitores. Comencemos por el proceso de carga para el que utilizaremos el circuito de la Figura 10.5.

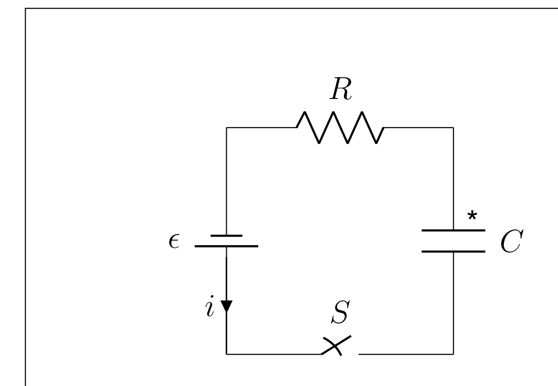


Figura 10.5: Circuito para analizar el proceso de carga de un capacitor. El interruptor se cierra a $t = 0$. La corriente i, dependiente del tiempo, se ha indicado en el gráfico con el sentido elegido como positivo. Notar que el capacitor tiene un asterisco en una de sus placas, en adelante nos referiremos a la carga del capacitor como a la carga de esta placa.

Antes de iniciar el análisis observemos que al referirnos a la carga de un capacitor, estamos nombrando la carga de una de sus placas. En ciertas circunstancias es imprescindible idententificar a qué placa nos referimos al indicar la carga. Por tanto, nosotros identificaremos con un asterisco ($*$) a la placa en cuestión. Luego, también necesitaremos un sentido prefijado para la corriente que identificaremos como positiva (Figura 10.5). Entonces la carga del capacitor y la corriente están relacionadas por

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} \qquad (10.9)$$

donde $i(t)$ y $q(t)$ representan los valores instantáneos de corriente y carga respectivamente. En lo que resta del tratamiento de circuitos, adoptaremos las letras minúsculas para indicar funciones del tiempo.

Examinemos críticamente la relación (10.9). En ella conviven dos aspectos convencionales: el sentido designado como positivo para la corriente (flecha) y la placa del capacitor elegida para describir su carga (asterisco). Aquí observamos que cuando la placa del asterisco está cargada positivamente y aumenta su carga, dq/dt resulta positiva. Para ello, la corriente i en el conductor que llega a la placa debe ser entrante a la misma, esto es, negativa respecto de nuestra convención. Para compatibilizar la relación entre i y dq/dt es necesario el signo negativo en (10.9). Esta manera de pensar puede utilizarse para cualquier elección de flechas y asteriscos. Así ocurrirá que (10.9) puede tener signo positivo o negativo según corresponda.

Ahora comenzamos con la resolución, planteando la regla de Kirchhoff para la malla única que constituye el circuito. Supongamos que el interruptor S se cierra en el instante $t = 0$. Entonces, en cualquier instante posterior tenemos

$$-\epsilon \; - \; iR + \frac{q}{C} \; = \; 0 \tag{10.10}$$

donde ϵ es la fuerza electromotriz aportada por la pila, R es la resistencia y C la capacidad, todas magnitudes indicadas en el circuito. Reemplazando (10.9) en (10.10) tenemos

$$-\frac{\epsilon}{R} + \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} \; = \; 0 \tag{10.11}$$

Despejando la derivada obtenemos una forma adecuada para la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{dt} \; = \; -\frac{1}{RC} \; (Q - \epsilon C) \tag{10.12}$$

En vistas a la integración, conviene un cambio de variable

$$u \; = \; q - \epsilon C \quad \rightarrow \quad du \; = dq \tag{10.13}$$

Reemplazando y separando variables, estamos en condiciones de integrar a ambos miembros:

$$\frac{du}{u} \; = \; -\frac{dt}{RC} \quad \rightarrow \quad \int_{u_0}^{u} \frac{du'}{u'} \; = \; -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \tag{10.14}$$

Observe que al plantear las integrales, las variables de integración se indican primadas. Esto se hace para evitar que las mismas se confundan con los límites superiores de integración, que también son variables. Así tenemos

$$ln\left(\frac{u}{u_0}\right) \;=\; -\frac{t}{RC} \quad\to\quad \frac{u}{u_0} \;=\; e^{-\frac{t}{RC}} \tag{10.15}$$

Aquí definimos dos constantes: la **constante de tiempo del circuito** τ y la **carga límite del capacitor** Q_∞. Las mismas vienen dadas por

$$\tau \;=\; RC \qquad Q_\infty \;=\; \epsilon C \tag{10.16}$$

dejamos a cargo del lector comprobar que τ tiene unidades de tiempo. Volviendo del cambio de variable e incorporando las nuevas constantes, tenemos

$$q\,(t) - Q_\infty \;=\; -Q_\infty\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.17}$$

con lo que finalmente obtenemos

$$q\,(t) \;=\; Q_\infty \left(1 \,-\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{10.18}$$

Es interesante observar aquí el significado de la constante de tiempo τ. Notemos que cuando el tiempo toma este valor ($t = \tau$), la carga del capacitor alcanza el $63\,\%$ de su valor máximo

$$q\,(\tau) \;=\; Q_\infty \left(1 \,-\, e^{-1}\right) \;=\; 0,63\, Q_\infty \tag{10.19}$$

Así concluimos que τ puede utilizarse cono una medida de cuán rápida resulta la carga del capacitor. Para obtener la corriente, utilizamos la relación (10.9)

$$i\,(t) \;=\; -\frac{Q_\infty}{RC}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \;=\; -I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.20}$$

donde I_0 representa la corriente inicial. Aquí nuevamente el valor de τ resulta un estimador de la rapidez del proceso, en este caso indicando cuánto tarda la corriente en alcanzar el $37\,\%$ de su valor inicial.

En la Figura 10.6 se grafican la evolución de la carga y de la corriente en función del tiempo durante el proceso de carga de un capacitor.

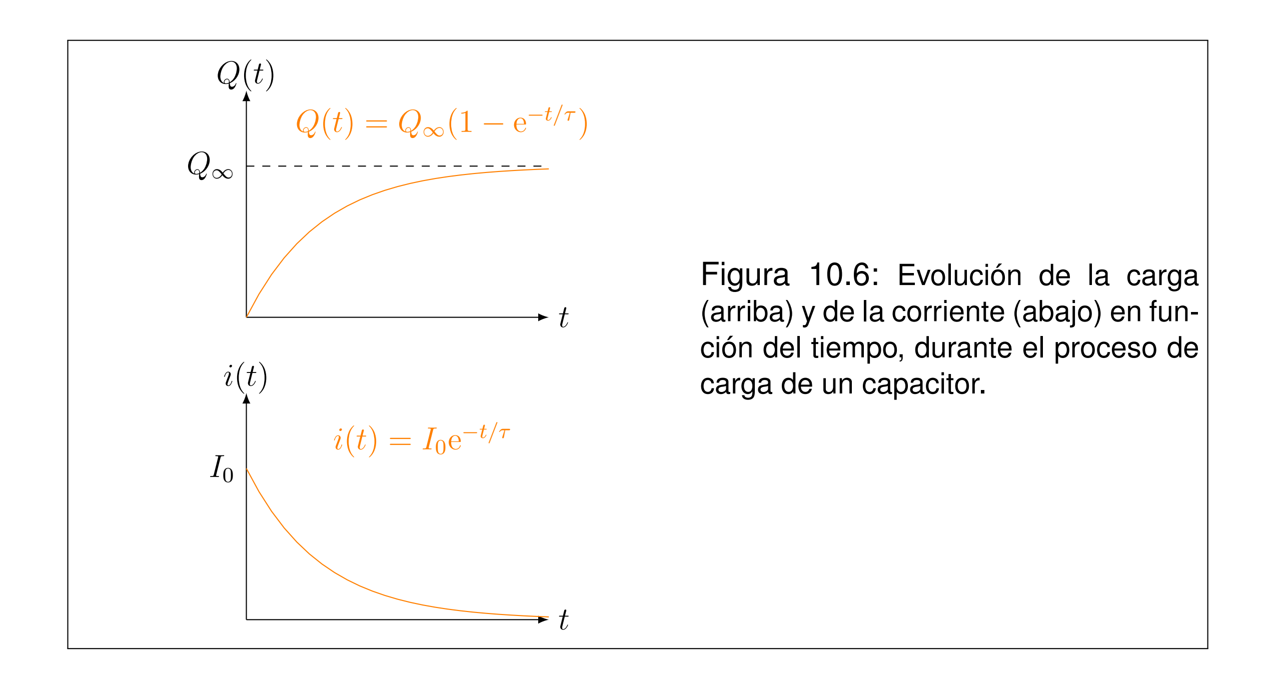


Figura 10.6: Evolución de la carga (arriba) y de la corriente (abajo) en función del tiempo, durante el proceso de carga de un capacitor.

Ahora nos ocupamos del proceso de descarga. Para ello utilizamos el circuito de la Figura 10.7.

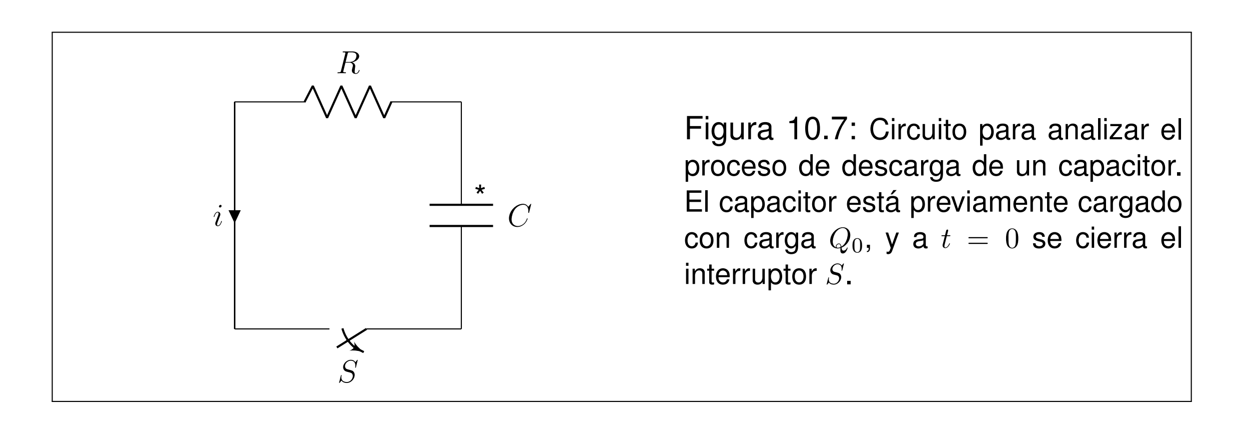


Figura 10.7: Circuito para analizar el proceso de descarga de un capacitor. El capacitor está previamente cargado con carga Q_0, y a $t = 0$ se cierra el interruptor S.

Aquí utilizamos los mismos criterios de signos que en el caso anterior, por lo que la relación entre carga y corriente nuevamente viene dada por (10.9). Supongamos ahora que al tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor S. Entonces en cualquier tiempo posterior la regla de mallas de Kirchhoff conduce a

$$-iR + \frac{q}{C} = 0 \qquad (10.21)$$

Reemplazando (10.9) en (10.21) tenemos

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \tag{10.22}$$

Esta es una ecuación diferencial formalmente idéntica a (10.14), por lo que procedemos en forma análoga

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \tag{10.23}$$

Integrando a ambos miembros tenemos

$$ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \rightarrow \quad \frac{q}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}} \tag{10.24}$$

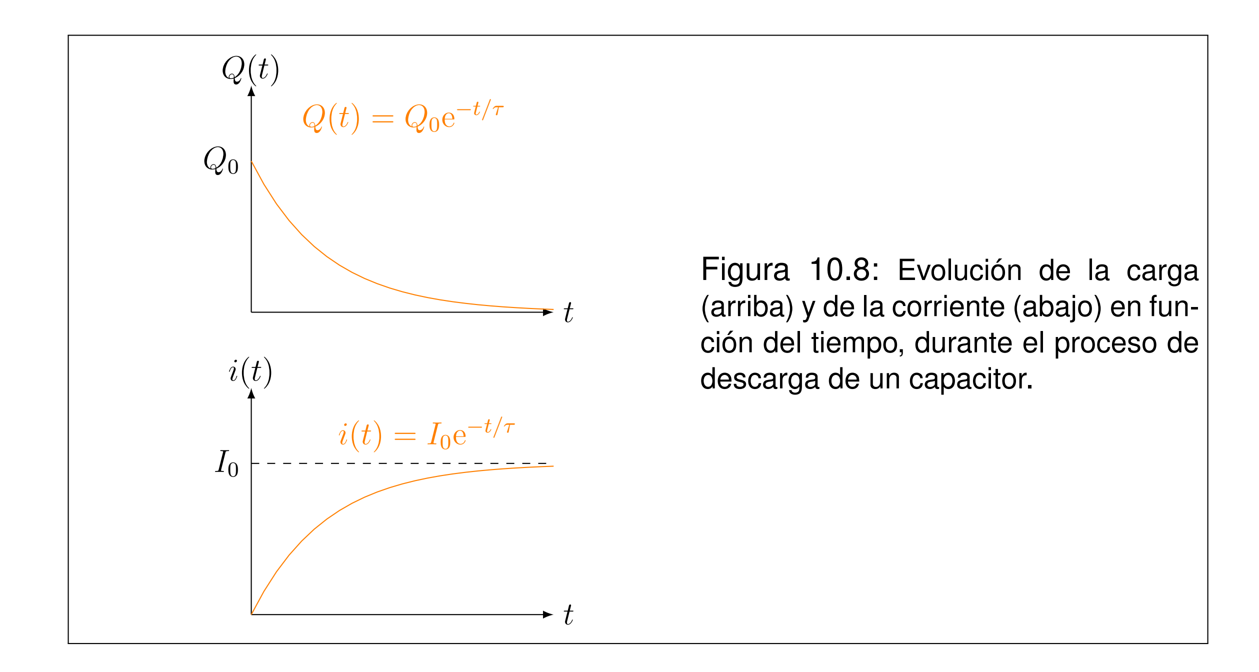


Figura 10.8: Evolución de la carga (arriba) y de la corriente (abajo) en función del tiempo, durante el proceso de descarga de un capacitor.

Utilizando la misma definición de τ dada en (10.16) obtenemos la expresión para la carga como función del tiempo

$$q\,(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.25}$$

Para obtener la corriente como función del tiempo, recurrimos nuevamente (10.9)

$$i\,(t) \;=\; \frac{Q_0}{RC}\,e^{-\frac{t}{\tau}} \;=\; I_0\,e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.26}$$

donde I_0 es la corriente inicial.

En la Figura 10.8 se grafican la evolución de la carga y de la corriente en función del tiempo durante el proceso de descarga de un capacitor.

10.7. Conexión y desconexión de inductores

La conexión y desconexión de un inductor que forma parte de un circuito elemental, pueden resolverse con relativa facilidad. Consideremos en primer lugar, el proceso de conexión utilizando el circuito de la Figura 10.9.

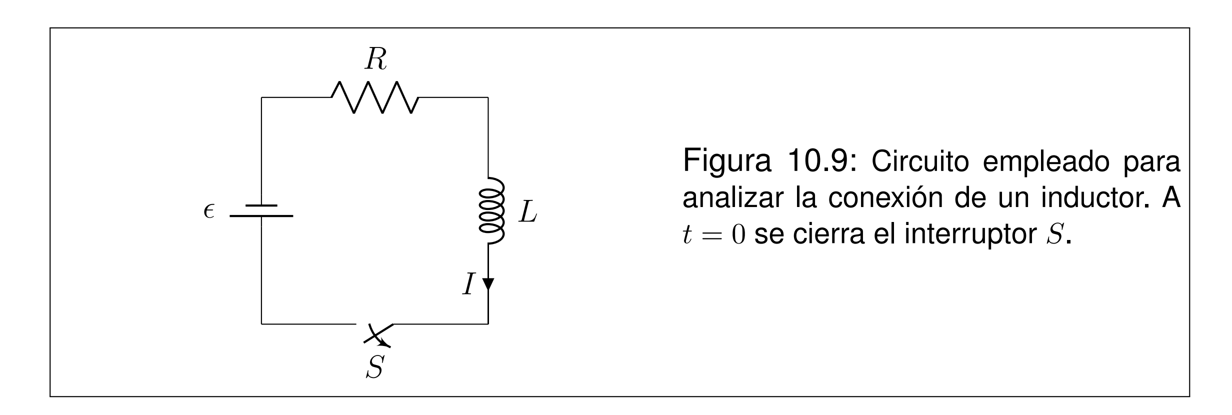


Figura 10.9: Circuito empleado para analizar la conexión de un inductor. A $t = 0$ se cierra el interruptor S.

Sobre el inductor está indicado el sentido en que la corriente será considerada positiva. Supongamos que al tiempo $t = 0$, se cierra el interruptor S. Entonces para tiempos posteriores tenemos la ecuación de malla dada por

$$\epsilon \,-\, iR \,-\, L\frac{di}{dt} \;=\; 0 \tag{10.27}$$

Buscamos una forma apropiada para la ecuación diferencial, que nuevamente será análoga a (10.14).

$$\frac{di}{dt} \,=\, -\,\frac{R}{L}\,\left(i - \frac{\epsilon}{R}\right) \tag{10.28}$$

Aquí introducimos un cambio de variable tendiente a la integración de (10.28)

$$u = i - \frac{\epsilon}{R} \quad \rightarrow \quad du = di \tag{10.29}$$

con lo que tenemos

$$\frac{du}{u} = -\frac{R\,dt}{L} \quad \rightarrow \quad \int_{u_0}^{u} \frac{du'}{u'} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt' \tag{10.30}$$

Resolvemos las integrales de ambos miembros y obtenemos

$$ln\left(\frac{u}{u_0}\right) = -\frac{Rt}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{u}{u_0} = e^{-\frac{Rt}{L}} \tag{10.31}$$

Definimos las constantes τ y I_∞. La primera es la **constante de tiempo del circuito**, operativamente análoga a la presentada en la carga de capacitores. La segunda representa la corriente que alcanzará el circuito al finalizar el proceso transitorio.

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad I_\infty = \frac{\epsilon}{R} \tag{10.32}$$

Reemplazando, tenemos

$$i\,(t) - I_\infty = -I_\infty\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.33}$$

con lo que la corriente como función del tiempo resulta

$$i\,(t) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{10.34}$$

Tratemos ahora el proceso de desconexión del inductor. Este requiere un circuito algo más complicado, porque el inductor no puede tener una corriente a priori sin una fuente que la sostenga. El circuito elemental que representa el proceso se muestra en la Figura 10.10.

El proceso transitorio se inicia al tiempo $t = 0$, cuando el conmutador pasa de la posición A a la posición B. La corriente que circula inicialmente por el inductor es la que sostiene la pila y viene dada por

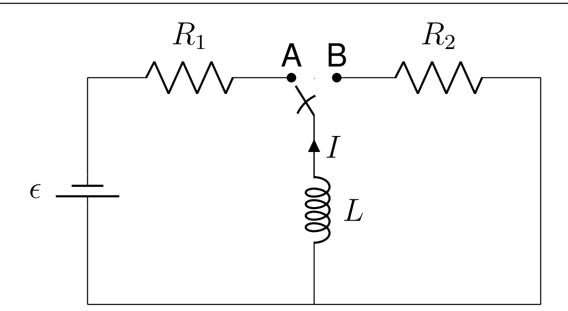


Figura 10.10: Circuito empleado para analizar la desconexión de un inductor. Inicialmente el inductor se encuentra conectado a una fuente que sostiene la corriente I_0 (conmutador en la posición **A**). A $t = 0$ el conmutador se lleva a la posición **B**.

$$I_0 \;=\; \frac{\epsilon}{R_1} \tag{10.35}$$

Después de la conmutación, la regla de mallas conduce a

$$-iR_2 \,-\, L\frac{di}{dt} \;=\; 0 \tag{10.36}$$

de donde la ecuación diferencial puede escribirse como sigue

$$\frac{di}{dt} + \frac{iR_2}{L} \;=\; 0 \tag{10.37}$$

Separando variables como en los casos anteriores, tenemos

$$\frac{di}{i} \;=\; -\frac{R_2\,dt}{L} \quad \rightarrow \quad \int_{I_0}^{i} \frac{di'}{i'} \;=\; -\frac{R_2}{L}\int_0^t dt' \tag{10.38}$$

Integrando a ambos miembros tenemos

$$ln\left(\frac{i}{I_0}\right) \;=\; -\frac{R_2 t}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{i}{I_0} \;=\; e^{-\frac{R_2 t}{L}} \tag{10.39}$$

Definimos la constante de tiempo τ como

$$\tau \;=\; \frac{L}{R_2} \tag{10.40}$$

con lo que la corriente como función del tiempo toma la forma

$$i\,(t) \;=\; I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.41}$$

En la Figura 10.11 se grafica la evolución de la corriente en función del tiempo durante el proceso de conexión y de desconexión de un inductor.

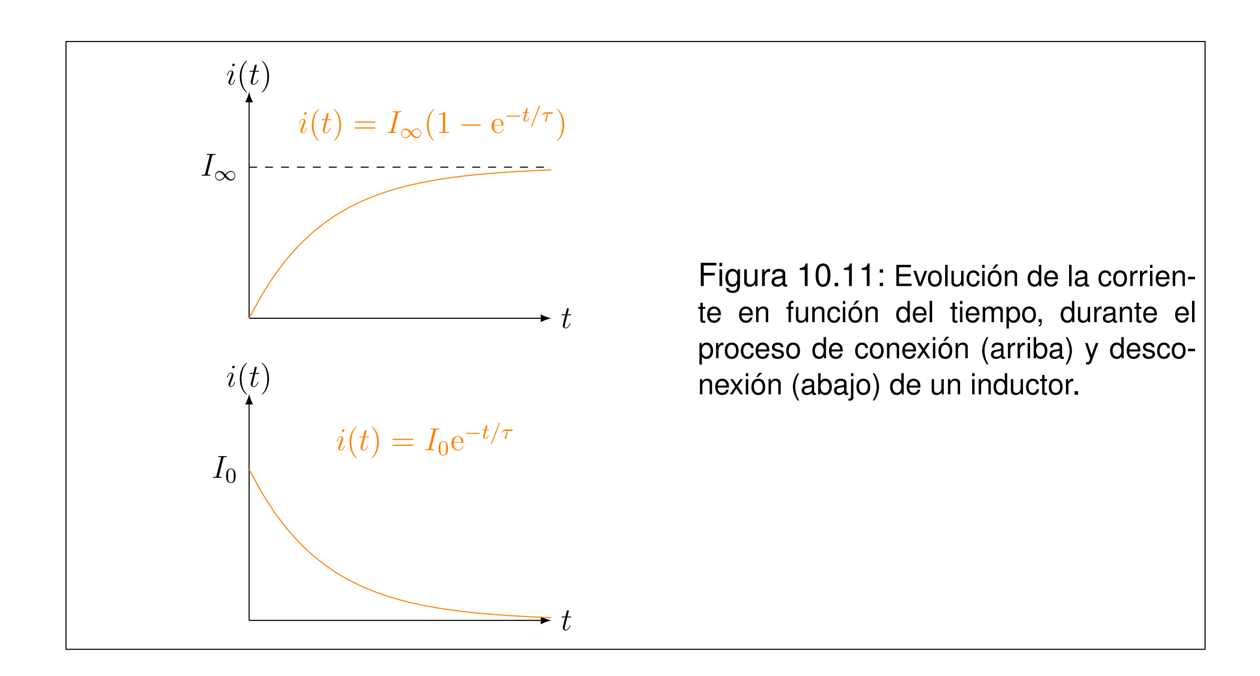


Figura 10.11: Evolución de la corriente en función del tiempo, durante el proceso de conexión (arriba) y desconexión (abajo) de un inductor.

El problema queda así formalmente resuelto. Pero es interesante observar la fuerza electromotriz inducida en el inductor, a la que llamaremos ϵ_L. La misma se obtiene como sigue

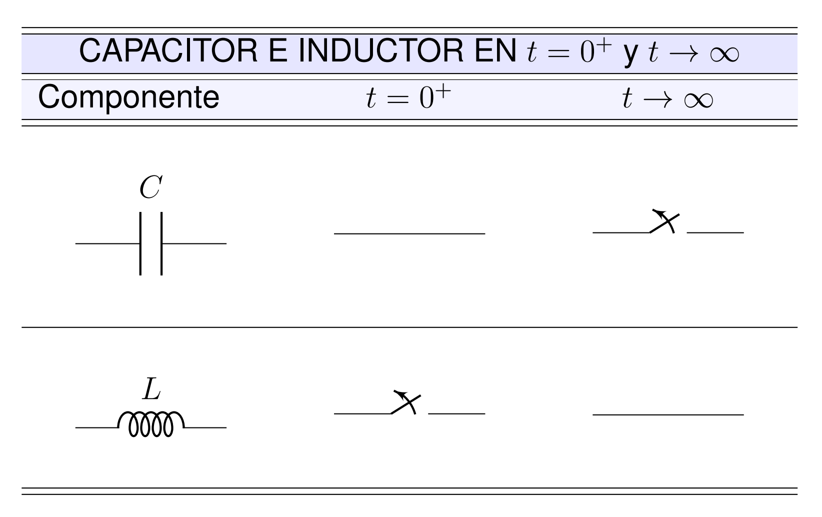
$$\epsilon_L\,(t) \;=\; -L\,\frac{di}{dt} \;=\; I_0 R_2\, e^{-\frac{t}{\tau}} \;=\; \epsilon_{L0}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{10.42}$$

donde ϵ_{L0} representa la fuerza electromotriz inicial en el inductor, es decir, justo después de operada la comnutación. Observemos el detalle siguiente, teniendo en cuenta la expresion (10.35)

$$\epsilon_{L0} \;=\; I_0 R_2 \;=\; \frac{R_2}{R_1}\,\epsilon \tag{10.43}$$

Este resultado esconde una propiedad bastante sorprendente. Tanto los resistores de $1\,\Omega$ como los de $10000\,\Omega$ son fácilmente conseguibles. Las pilas de $1,5$ V más fáciles aún. Entonces, haciendo $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 10000\Omega$ y $\epsilon = 1,5$V, podemos obtener (aunque por un lapso extremadamente corto) una tensión $\epsilon_{L0} = 15000$ V. Este tipo de circuitos es utilizado en los dispositivos que producen chispas, como por ejemplo los encendedores electrónicos.

El Cuadro 10.2 resume el comportamiento de capacitores e inductores inmediatamente después de conectados a una fuente de tensión, y luego de un tiempo muy largo.



CAPACITOR E INDUCTOR EN $t = 0^+$ y $t \to \infty$		
Componente	$t = 0^+$	$t \to \infty$
C		
L		

Cuadro 10.2: Comportamiento de un capacitor y un inductor inmediatamente después de conectado a una batería ($t = 0^+$) y luego de transcurrido mucho tiempo ($t \to \infty$).

10.8. Circuitos oscilantes

Algunos circuitos elementales, al menos en formato teórico, no alcanzan un régimen estacionario en el sentido propuesto en este capítulo. A continuación daremos un ejemplo muy simple de este tipo de circuito (ver Figura 10.12). El mismo conecta en una malla, un capacitor y un inductor. El capacitor está inicialmente cargado con una carga Q_0, y el interruptor se acciona al tiempo $t = 0$.

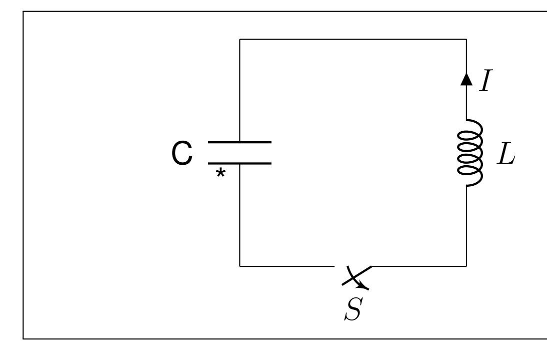


Figura 10.12: Circuito para analizar un comportamiento oscilante. El capacitor está inicialmente cargado con carga Q_0, y a $t = 0$ se cierra el interruptor S.

La relación entre cargas y corrientes sigue siendo compatible con (10.9). La regla de mallas conduce a

$$\frac{q}{C} \; - \; L \frac{di}{dt} \; = \; 0 \tag{10.44}$$

Reemplazando (10.9) en (10.44), y dividiendo por L tenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} \; + \; \frac{q}{LC} \; = \; 0 \tag{10.45}$$

Esta es la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple en la variable $q(t)$. Recordemos brevemente que un oscilador mecánico cuya variable oscilante es x satisface una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} \; + \; \omega^2 \, x \; = \; 0 \tag{10.46}$$

donde ω es la frecuencia de oscilación. Las soluciones son de la forma

$$x\,(t) \; = \; A \, \cos\left(\omega t + \phi\right) \tag{10.47}$$

Homologando nuestra ecuación diferencial (10.45) con la solución del oscilador armónico mecánico (10.46), y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, tenemos la siguiente solución

$$q\,(t) \; = \; Q_0 \, \cos\left(\omega t\right) \qquad \text{con} \qquad \omega \; = \; \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10.48}$$

10.9. Problemas

1. Consideremos un conductor eléctrico (por ejemplo, un cable de cobre) entre cuyos extremos se sostiene una diferencia de potencial constante mediante una batería. Para visualizar el fenómeno que ocurre dentro del conductor proponemos un modelo muy simple. Supongamos que el mismo está formado por una colección de iones de cobre que solo pueden vibrar alrededor de sus posiciones de equilibrio, y un gas de electrones libres que pueden moverse dentro de las fronteras del material. El movimiento de los electrones está "entorpecido" por las interacciones con los iones. Cuando el conductor es sometido a una diferencia de potencial, se establece un campo eléctrico persistente en su interior, que acelera los electrones, precipitándolos a sucesivos choques con los iones.

    a) Según se discutió en el capítulo de electrostática, en tales condiciones no era posible que un campo eléctrico existiera dentro de un conductor. Sin embargo, en nuestro modelo consideramos que cierto campo eléctrico se establece "dentro" del conductor ¿Cómo se compatibilizan estos conceptos? ¿Será conservativo el campo eléctrico dentro del conductor?

    b) Construya un gráfico que incluya los vectores campo eléctrico $\vec{E}$, densidad de corriente $\vec{J}$, velocidad instantánea $\vec{v}$ del electrón y velocidad media $\vec{v}_m$ del electrón.

    c) Explique los aspectos microscópicos de la transferencia de energía entre los electrones y los iones del conductor. En términos del modelo, ¿a qué atribuiría el calentamiento del conductor por efecto Joule?

    d) ¿Cómo está relacionada la corriente I en el conductor con la densidad de corriente $\vec{J}$? Si el conductor no tuviera sección uniforme, ¿sería uniforme la corriente a lo largo del conductor?

2. Generalmente, la rapidez media de los electrones es del orden de los mm/s. Es decir que, probablemente, un electrón viaje varias horas por el cable para llegar desde el interruptor hasta la lámpara del techo de la sala. ¿Por qué entonces la luz se enciende inmediatamente después de accionar el interruptor?

3. Un calentador eléctrico de 600W fue diseñado para conectarlo a una línea de 220V.

    a) Determine la resistencia del calentador, y la corriente que requiere para su funcionamiento.

    b) Sabiendo que la equivalencia entre Calorias y Joules es 1 cal $= 4,186$ J, determine la potencia del calentador en Kcal/h.

    c) Si la tensión de la línea disminuye en un $10\,\%$, ¿en qué proporción disminuye la potencia del calentador?

4. Las lamparitas de filamento que utilizamos cotidianamente suelen tener indicadas la potencia y la tensión a la que deben conectarse. Determine la resistencia de las siguientes lamparitas y la corriente que circula por ellas en condiciones normales de trabajo.

    a) Lamparita doméstica de 75 W para conexión a 220 V.

    b) Lamparita de linterna de $2,4$ W para conexión a $4,8$ V.

    c) Lamparita de faro de automóvil de 100 W para conexión a 12 V.

5. En el circuito de la Figura 1, todas las resistencias son iguales ($R = 1\ \Omega$), y la batería aporta una diferencia de potencial $\epsilon = 12$ V. Los terminales de la batería (indicados con flechas) pueden conectarse en diferentes partes del circuito. Encuentre la resistencia equivalente y la corriente que pasa por la batería en cada uno de los siguientes casos:

    a) cuando la batería se conecta entre A y B.

    b) cuando la batería se conecta entre A y C.

    c) cuando la batería se conecta entre A y D.

    d) cuando la batería se conecta entre A y E.

    e) cuando la batería se conecta entre A y F.

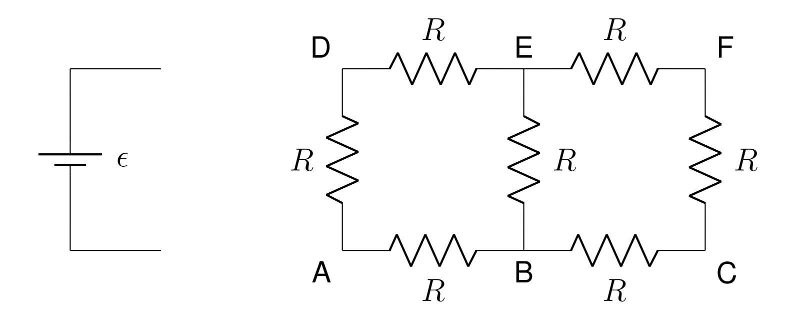


Figura 1

6. El filamento de una lamparita doméstica de 75 W mide 7 cm de largo. Sabiendo que el mismo es de tungsteno, cuya resistividad es $\rho_W = 5,65 \times 10^{-8} \Omega$ m, determine su diámetro.

7. Un calentador eléctrico está diseñado para calentar un litro de agua dentro de un termo, llevando la temperatura de 20^oC a 80^oC en 5 minutos. Determine la resistencia del calentador[2].

[2]Para elevar en 1^oC la temperatura de 1 litro de agua se requiere 1 kilocaloría.

8. En el circuito de la Figura 2, las resistencias son $R_1 = 1200\,\Omega$, $R_2 = 3300\,\Omega$ y $R_3 = 2700\,\Omega$. Cuando el interruptor S está abierto, la diferencia de potencial entre los bornes de la batería es de 12 V. Luego, cuando se cierra S, dicha diferencia de potencial disminuye hasta $11,92$V. Determine la fuerza electromotriz y la resistencia interna de la pila.

9. *a*) Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos A y B de la Figura 3.

   b) Si se conecta una batería que suministra una fuerza electromotriz $\epsilon = 12$ V entre los puntos A y B, ¿qué potencia estará entregando al circuito?

   c) ¿Qué porcentaje de la potencia entregada al circuito se disipa en la resistencia de $12\,\Omega$?

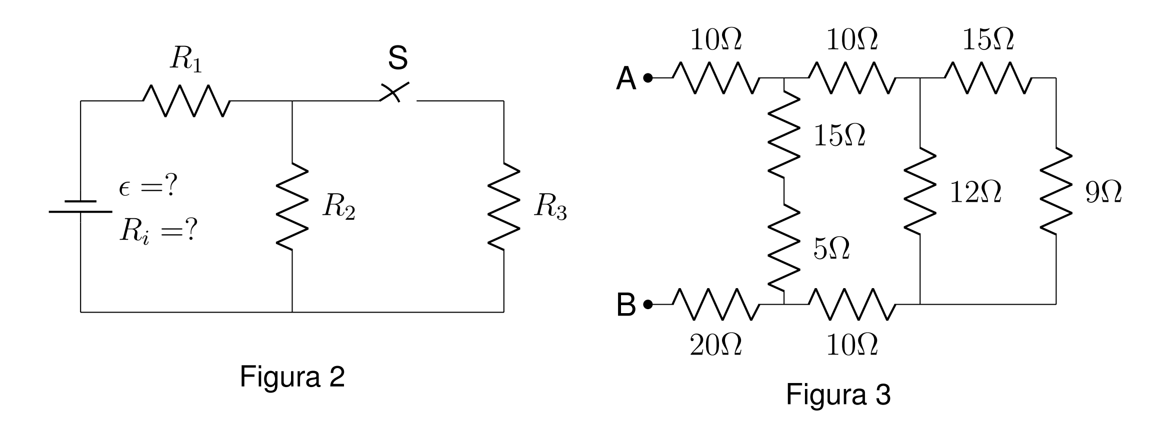


Figura 2

Figura 3

10. Determine la diferencia de potencial entre los puntos A y B del circuito que representado en la Figura 4.

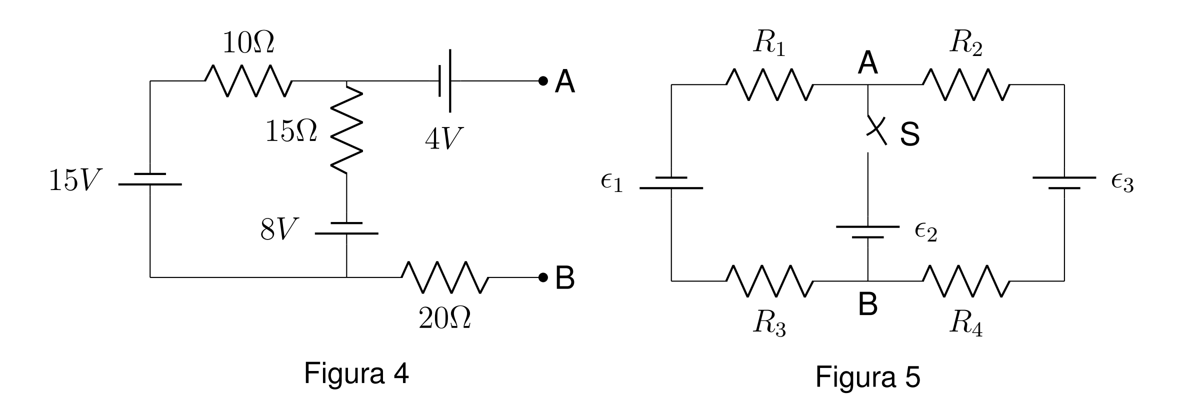


Figura 4

Figura 5

11. En el circuito de la Figura 5, las tensiones suministradas por las baterías son $\epsilon_1 = 15\,$V, $\epsilon_2 = 10\,$V y $\epsilon_3 = 5\,$V. Las resistencias son todas iguales $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5\,\Omega$.

a) Determine la diferencia de potencial entre los puntos A y B mientras el interruptor S se mantiene abierto. Determine la potencia disipada en cada resistor.

b) Calcule las corrientes en cada rama del circuito cuando se cierra S. Determine nuevamente la potencia disipada en cada resistor.

12. En el circuito de la Figura 6, las resistencias son todas iguales $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$, las capacidades son $C_1 = C_2 = 50\,\mu$F y la fuerza electromotriz de la pila es $\epsilon = 30$ V. Suponga que los capacitores están inicialmente descargados. Determine la corriente a través de cada resistor y la carga en cada capacitor, en los instantes que se detallan en la siguiente secuencia:

a) justo después de cerrar simultáneamente los interruptores S_1 y S_2

b) mucho tiempo después de cerrados S_1 y S_2

c) justo después de abrir simultáneamente los interruptores S_1 y S_2

d) mucho tiempo después de abiertos S_1 y S_2

e) justo después de cerrar nuevamente S_2

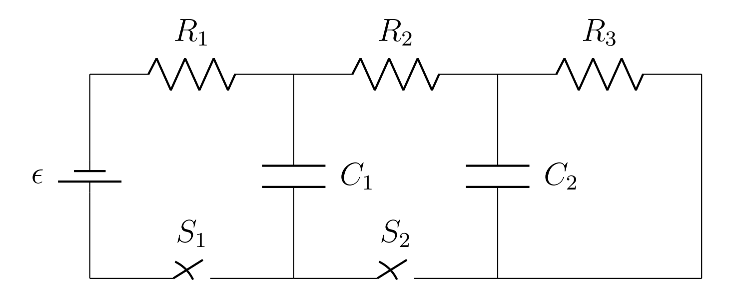


Figura 6

13. En el circuito de la Figura 7, la batería suministra una tensión $\epsilon = 12$ V, las resistencias son $R_1 = 10\,\Omega$ y $R_2 = 20\,\Omega$, y la capacidad es $C = 50\,\mu$F.

a) Suponga que inicialmente el capacitor está descargado, y se cierra el interruptor S. Determine la corriente en cada resistencia, justo después del cierre.

b) Determine la carga del capacitor y las corrientes en cada resistencia, transcurrido un tiempo muy largo después del cierre de S.

c) En las condiciones del inciso anterior, se abre el interruptor S. Calcule la carga del capacitor y la corriente en cada resistencia, 2 ms después de abrir S.

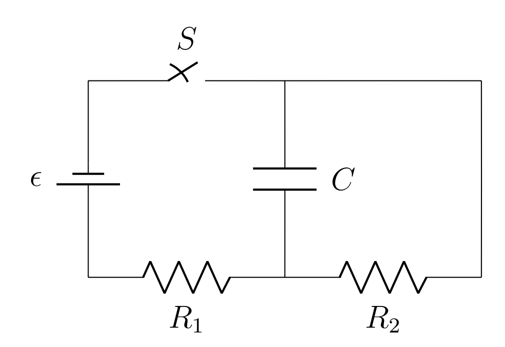


Figura 7

14. Los circuitos de la Figura 8 son análogos, a menos de su rama central. En ambos casos la pila aporta una fuerza electromotriz $\epsilon = 12$ V, y las resistencias son $R_1 = 20\,\Omega$ y $R_2 = 50\,\Omega$. Por su parte, la capacidad es $C = 10\,\mu$F y la autoinducción es $L = 100$ mH. Calcule en ambos casos:

    a) La corriente a través de la pila justo después de conectar el conmutador con el contacto A.

    b) El tiempo transcurrido hasta que la corriente alcanza la mitad de su valor máximo.

    c) La corriente a través de la pila después de mucho tiempo de la conexión con A.

    d) La energía almacenada en los campos en las condiciones del inciso anterior.

    e) La corriente a través de R_2 justo después de conectar el conmutador en la posición B.

    f) La constante de tiempo del circuito en las condiciones del inciso *e).*

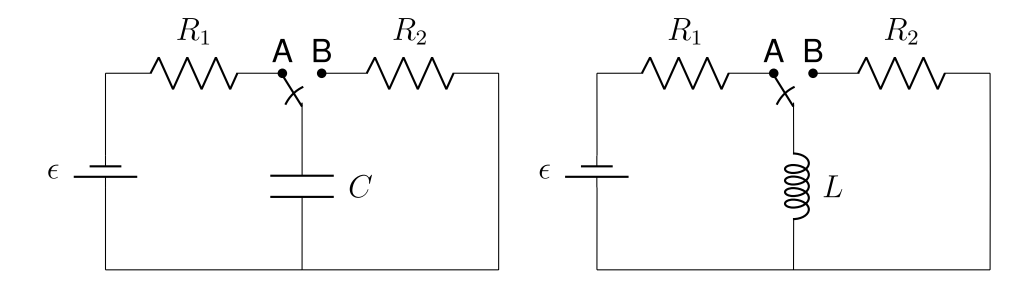


Figura 8

15. Los terminales de un capacitor de $100\ \mu$F se conectan con los de un inductor de 50 mH. El capacitor estaba originalmente cargado con $30\ \mu$C.

    a) Pruebe que la carga del capacitor y la corriente en el inductor son variables oscilantes, y determine su frecuencia de oscilación.

    b) Determine la carga del capacitor y la corriente en el inductor cuando transcurrieron $20\ \mu$s desde la conexión.

16. Un capacitor de $C = 100\ \mu$F posee una carga $Q_0 = 250\ \mu$C. El mismo se conecta con un inductor ideal de $L = 10$ mH. Pruebe que en el circuito formado por el capacitor y el inductor, se establece una corriente alterna. Determine su amplitud y su frecuencia. Construya las funciones del tiempo que describen la carga del capacitor y la corriente en el inductor.

17. En el circuito de la Figura 9, los componentes tienen las siguientes especificaciones, $R_1 = R_4 = 10\,\Omega$, $R_2 = R_3 = 20\,\Omega$, $L = 60$ mH y $\epsilon = 24$ V.

    a) Determine la corriente a través de la batería en el instante justo posterior al cierre del interruptor.

    b) Repita el cálculo habiendo transcurrido mucho tiempo desde que se cerró el interruptor.

    c) Suponga que en las condiciones del inciso b, se abre nuevamente el interruptor. Determine las corrientes a través del inductor y de cada resistor habiendo transcurrido 3 ms desde la última operación.

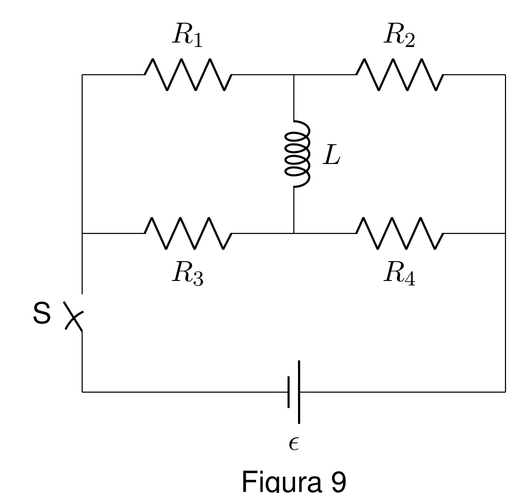


Figura 9

Capítulo 11
Circuitos con fuentes de tensión alterna

11.1. Introducción

Los circuitos de corriente alterna constituyen un ejemplo cotidiano de aplicación del electromagnetismo, ya que las redes domiciliarias son circuitos de este tipo. Cuando tratamos la ley de Faraday, observamos que los montajes de bobinas giratorias en campos magnéticos uniformes generan fuerzas electromotrices oscilantes, a expensas de la energía aportada por un agente externo (motor). Tal dispositivo puede utilizarse como fuente de alimentación para un circuito, en cuyo caso diremos que el dispositivo es una **fuente de tensión alterna**, y que el circuito está sometido a un **régimen de corriente alterna**[1]. En nuestro tratamiento, nos remitiremos exclusivamente a fuentes de tensión alterna que suministran tensiones de la forma

$$v_F(t) = V_F \ \sin(\omega t + \phi) \tag{11.1}$$

donde $v_F(t)$ representa la diferencia de potencial garantizada entre los terminales de la fuente en cada instante (note que es una función del tiempo). Como se trata de una magnitud que oscila armónicamente, cabe definir su amplitud V_F, su frecuencia angular ω y su fase inicial ϕ.

En este curso solo trataremos circuitos elementales, incluyendo resistores, inductores y capacitores, bajo la acción de una única fuente de tensión alterna. Como ya es sabido, la puesta en marcha de un circuito que contiene inductores

[1] En realidad, la tecnología actual provee de fuentes de tensión alterna que funcionan por principios muy diversos, por lo que los dispositivos mencionados deben tomarse como un ejemplo para fijar ideas.

y capacitores da lugar a un régimen transitorio. Nosotros no analizaremos tales efectos, por lo que asumiremos que la conexión de la fuente con el circuito se ha realizado largo tiempo atrás[2]. En estas condiciones, puede probarse que todas las tensiones y corrientes medibles del circuito oscilan armónicamente con la misma frecuencia que la fuente. Si llamamos $u(t)$ a una tensión medida entre dos puntos del circuito, o a una corriente medida en un punto del circuito, la misma será de la forma

$$u(t) = U\ \sin\left(\omega t + \delta\right) \tag{11.2}$$

donde ω siempre es la misma frecuencia angular de la fuente y δ es una fase relativa particular de cada magnitud medida.

Con respecto a las notaciones, observemos como ejemplo la función (11.2). Reservaremos las letras minúsculas para identificar los valores instantáneos de una magnitud (variable dependiente del tiempo), y su homóloga mayúscula para la amplitud asociada.

11.2. La representación fasorial

Como sabemos, los vectores en el plano pueden representarse como segmentos orientados. Un **fasor** es un vector "rotante", tal que el segmento que lo representa mantiene uno de sus extremos fijos, mientras que el otro (el que tiene flecha) gira sobre una circunferencia. Nosotros utilizaremos esta representación para el caso particuar en que el fasor gira con frecuencia angular constante ω en sentido antihorario (ver Figura 11.1). Sea $\vec{U}(t)$ un fasor genérico cuyas componentes en la notación habitual serán

$$\begin{aligned} u_x(t) &= U\ \cos\left(\omega t + \delta\right) \\ u_y(t) &= U\ \sin\left(\omega t + \delta\right) \end{aligned} \tag{11.3}$$

donde U representa el módulo del fasor. Observe la completa analogía entre las funciones (11.2) y la segunda de las ecuaciones (11.3). En virtud de tal comparación, podemos interpretar que las funciones del tipo (11.2) "son" las proyecciones de fasores sobre el eje "y". En tratamientos posteriores nos referiremos a fasores reservando las notaciones vectoriales a tal fin.

La principal ventaja de esta representación radica en que los fasores representativos de todas las magnitudes físicas giran a la misma velocidad, por lo que

[2]En terminología más estricta, decimos que el régimen es **estacionario**, aunque la palabra se presta a confusión por la variabilidad temporal de las magnitudes involucradas.

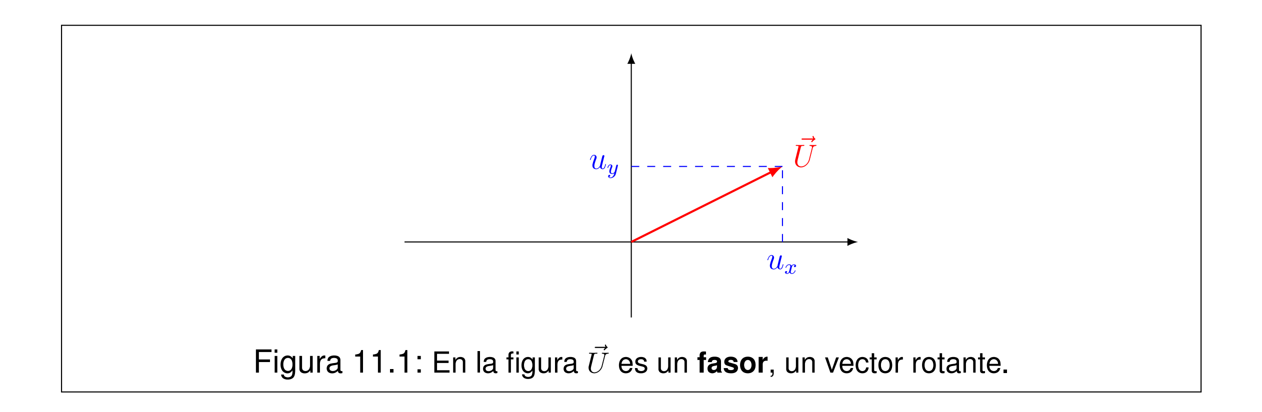


Figura 11.1: En la figura $\vec{U}$ es un **fasor**, un vector rotante.

sus posiciones relativas se mantienen en el tiempo como si fuera un rotador rígido. Esto permite evaluar relaciones vectoriales a un tiempo, sabiendo que dichas relaciones se mantienen para todo tiempo posterior.

11.3. Circuitos elementales

Los montajes más elementales que pueden concebirse en corriente alterna surgen de la conexión de un único dispositivo (resistor, capacitor o inductor) con la fuente de tensión alterna. Estos circuitos se representan en las Figuras 11.2 $a)$, $b)$ y $c)$.

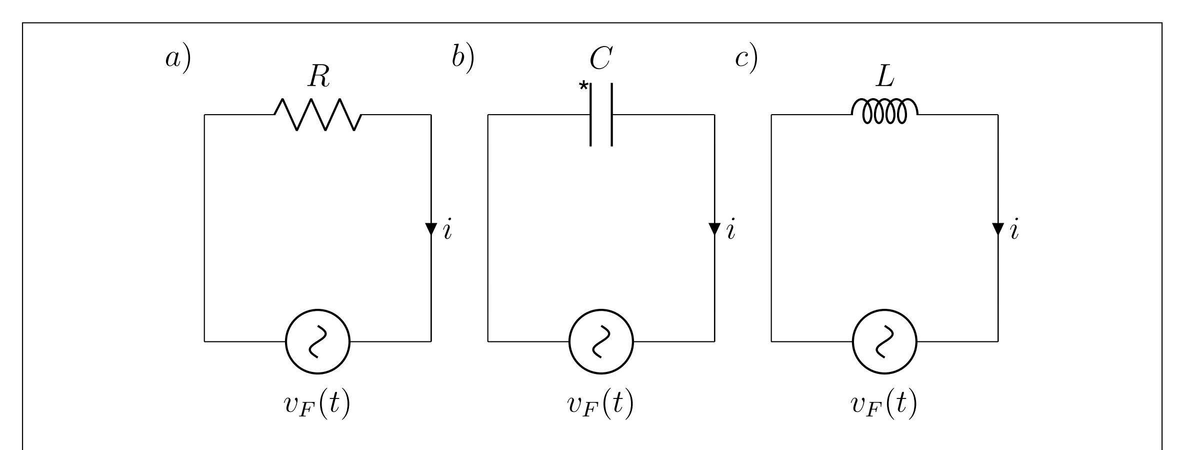


Figura 11.2: Circuitos elementales: $a)$ conexión de una fuente de tensión alterna con un resistor; $b)$ conexión con un capacitor; $c)$ conexión de un inductor

Observe que en las Figuras 11.2 se indican sentidos de circulación para la corriente, aún cuando sabemos que la misma será oscilante. En realidad, la flecha indica que cuando la corriente en nuestros cálculos resulte positiva, interpretaremos que circula a favor de la flecha y viceversa. Estos sentidos se eligen en

forma arbitraria, pero las ecuaciones deben ser consistentes con la convención adoptada[3].

A continuación trabajaremos con cada uno de los circuitos, para establecer la corriente como función del tiempo en cada caso. Asimismo, aprovecharemos este análisis para definir magnitudes muy útiles en circuitos más complejos. En todos los casos supondremos que la fuente suministra una tensión alterna del tipo (11.1) con fase inicial nula como se indica a continuación

$$v_F(t) = V_F\ \sin(\omega t) \tag{11.4}$$

Circuito con un resistor de resistencia R (Figura 11.2 a)): Aplicando la regla de Kirchhoff para un dado instante en la malla tenemos que

$$v_F - iR = 0 \tag{11.5}$$

donde se han omitido las dependencias temporales por simplicidad. Reemplazando por (11.4) tenemos

$$i = \frac{v_F}{R} = \frac{V_F}{R}\ \sin(\omega t) \tag{11.6}$$

Homologando con la forma 11.2 tenemos

$$i(t) = I\ \sin(\omega t) \qquad \text{siendo} \qquad I = \frac{V_F}{R} \tag{11.7}$$

donde I es la amplitud de la corriente y además puede observarse que la fase relativa de la corriente es nula. En tal sentido, se dice que *en un resistor, la tensión y la corriente están en fase.*

Circuito con un capacitor de capacidad C (Figura 11.2 b)): En este punto cabe una consideración sutil: la carga del capacitor varía con el tiempo en forma armónica, por lo que sus valores serán alternativamente positivos y negativos. Como las dos placas del capacitor siempre tienen cargas opuestas, hay que adoptar una de ellas como referencia para la carga. La convención que elegimos aquí es medir la carga sobre la placa en la que la corriente entra cuando es positiva (recordar el sentido de circulación). Como ayuda, colocamos en el dibujo un asterisco en la placa elegida. Con la convención establecida, la relación entre

[3]La elección de los sentidos de circulación es análoga a la que se plantea en circuitos de corriente continua.

la carga del capacitor y la corriente en la rama que lo contiene es

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{11.8}$$

Ahora aplicamos nuevamente la regla de Kirchhoff sobre la malla:

$$v_F - \frac{q}{C} = 0 \tag{11.9}$$

de donde se tiene que

$$q = Cv_F = CV_F \sin(\omega t) \tag{11.10}$$

y la corriente será

$$i = \omega CV_F \ \cos(\omega t) \tag{11.11}$$

Buscamos ahora que la corriente tenga un formato análogo a la función (11.2). Así tenemos

$$i(t) = I \ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{siendo} \qquad I = \omega CV_F \tag{11.12}$$

Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es $\pi/2$. En este sentido decimos que *en una rama que contiene un capacitor, la corriente* **adelanta** *en* $\pi/2$ *respecto de la tensión.*

Una magnitud muy práctica en la resolución de circuitos es la **reactancia capacitiva** χ_C que se define como

$$\chi_C = \frac{1}{\omega C} \tag{11.13}$$

Dejamos a cargo del estudiante probar que la unidad de esta magnitud coincide con la unidad de resistencia. Observe además que la relación entre las amplitudes de la tensión y la corriente toma la forma

$$I = \frac{V_F}{\chi_C} \tag{11.14}$$

Circuito con un inductor de autoinducción L (Figura 11.2 c)): Recordando la respuesta de los inductores (repasar ley de Faraday y autoinducción) tenemos, por aplicación de la regla de Kirchhoff

$$v_F - L\,\frac{di}{dt} = 0 \tag{11.15}$$

Esta es una ecuación diferencial que puede resolverse fácilmente. En primer lugar la escribimos como sigue

$$di = \frac{1}{L} v_F(t)\ dt = \frac{V_F}{L} \sin{(\omega t)}\ \ dt \tag{11.16}$$

Luego integramos en ambos miembros en forma indefinida

$$i = \frac{V_F}{L} \int \sin{(\omega t)}\ \ dt\ \ +\ \text{constante} \tag{11.17}$$

Con un cambio de variable muy simple tenemos que

$$i = -\frac{V_F}{\omega L} \cos{(\omega t)} + \text{constante} \tag{11.18}$$

Como la corriente debe tener la forma funcional (11.2), la constante debe ser nula. Así tenemos

$$i(t) = I\ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{donde} \qquad I = \frac{V_F}{\omega L} \tag{11.19}$$

Con esta homologación tenemos una expresión para la amplitud de la corriente, a la vez que observamos que la fase relativa es $-\pi/2$. Por esto decimos que *en la rama que contiene a un inductor la corriente* **atrasa** $\pi/2$ *con respecto a la tensión.*

Aquí también es conveniente introducir la magnitud χ_L llamada **reactancia**

inductiva, cuya definición es

$$\chi_L = \omega L \tag{11.20}$$

Nuevamente dejamos a cargo del lector probar que χ_L tiene unidades de resistencia. La relación entre las amplitudes de tensión y corriente es

$$I = \frac{V_F}{\chi_L} \tag{11.21}$$

Las representaciones fasoriales a $t = 0$ de estos circuitos elementales se muestran en la Figura 11.3.

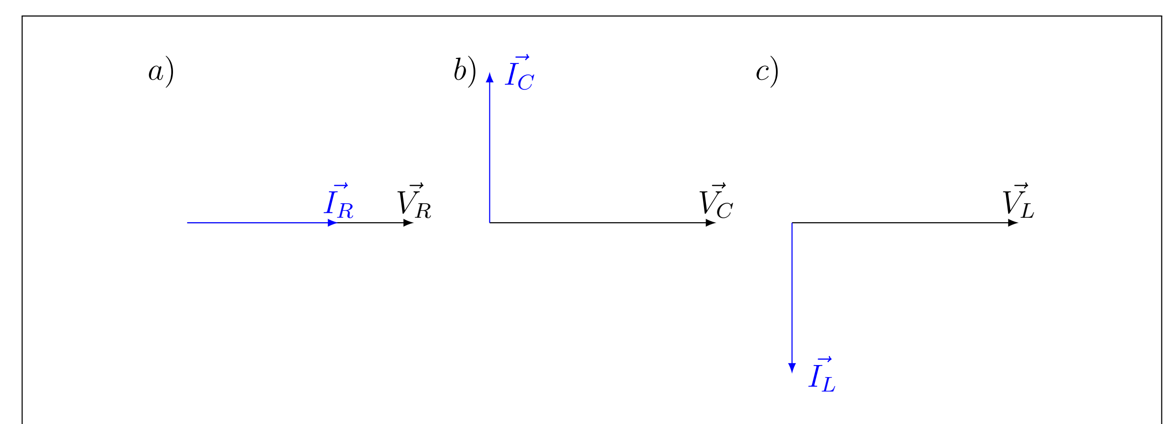


Figura 11.3: Diagramas fasoriales para las conexiones elementales: $a)$ fuente de tensión alterna con un resistor; $b)$ fuente de tensión alterna con un capacitor; $c)$ fuente de tensión alterna con un inductor. En cada diagrama se ha hecho explícito que la tensión y la corriente son las correspondientes al componente en cuestión.

11.4. El circuito RLC serie

El circuito RLC serie se compone de un resistor, un capacitor y un inductor conectados en serie con la fuente de tensión alterna tal como se muestra en la Figura 11.4.

Como se trata de un circuito serie, la corriente instantánea en cualquier punto del circuito debe ser la misma. Por simplicidad supondremos entonces que la fase inicial de la corriente es nula, y referiremos a ella todos los defasajes de las demás magnitudes oscilantes. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para los circuitos elementales podemos escribir a priori la forma en que varían las tensiones en cada dispositivo. Esto es

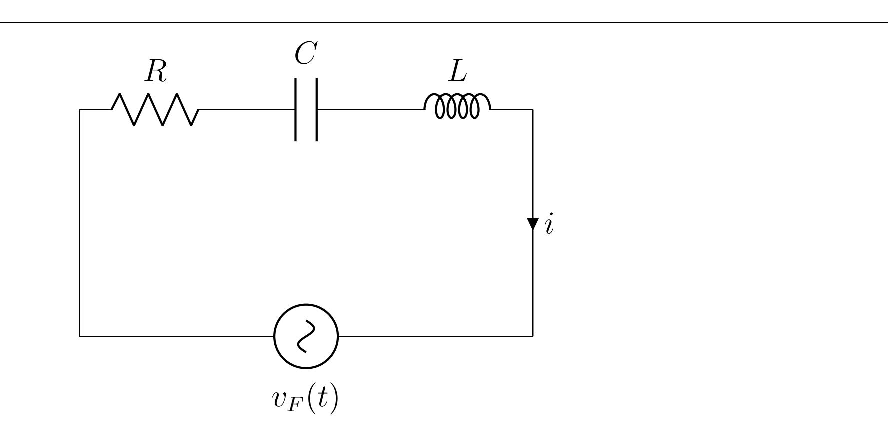


Figura 11.4: Circuito compuesto por un resistor, un inductor y un capacitor dispuestos en serie con una fuente de tensión alterna: RLC serie

$$\begin{aligned} i(t) &= I\ \sin(\omega t) \\ v_F(t) &= V_F\ \sin(\omega t + \phi) \\ v_R(t) &= V_R\ \sin(\omega t) \\ v_C(t) &= V_C\ \sin(\omega t - \pi/2) \\ v_L(t) &= V_L\ \sin(\omega t + \pi/2) \end{aligned} \qquad (11.22)$$

Las tensiones subindicadas corresponden a los terminales de cada dispositivo. La solución del problema consiste en establecer la amplitud I de la corriente, y la diferencia de fase ϕ entre la tensión v_F en terminales de la fuente y la corriente i del circuito. El correspondiente diagrama fasorial a $t = 0$ se muestra en la Figura 11.5 $a)$.

La aplicación de la regla de Kirchhoff en un instante sobre el circuito conduce a la ecuación

$$v_F - v_R - v_C - v_L = 0 \qquad (11.23)$$

o bien

$$v_F = v_R + v_C + v_L \qquad (11.24)$$

Invocando la naturaleza fasorial de las magnitudes en juego, podemos aplicar propiedades vectoriales. En particular, la componente y de la suma de tres vectores es igual a la suma de las componentes y de cada uno de ellos. La Figura 11.5 $b)$ es idéntica a la Figura 11.5 $a)$, con el agregado del vector $\vec{V}_F$ que se obtiene

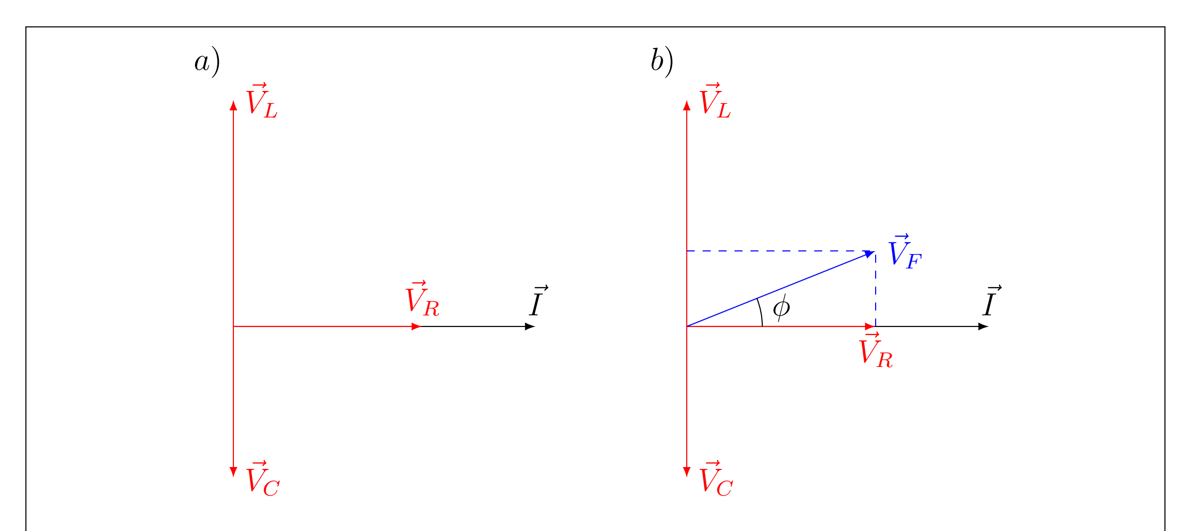


Figura 11.5: Diagrama fasorial para un circuito RLC serie. $a)$ Se indican las diferencias de fase entre la corriente y las tensiones de los componenetes del circuito; $b)$ la tensión en la fuente surge de la suma vectorial de las tensiones en los componentes.

como sigue

$$\vec{V}_F = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \tag{11.25}$$

De la construcción geométrica se deduce que la relación entre módulos de los vectores anteriores es

$$V_F = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \tag{11.26}$$

mientras que la fase ϕ puede obtenerse de

$$tg\ \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} \tag{11.27}$$

Recordemos ahora las relaciones de amplitudes desarrolladas para los circuitos elementales

$$V_R = IR \qquad V_C = I\chi_C \qquad V_L = I\chi_L \tag{11.28}$$

Reemplazando en (11.26) tenemos que

$$V_F = \sqrt{I^2 R^2 + (I\chi_L - I\chi_C)^2} \tag{11.29}$$

$$V_F = I\,\sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} \tag{11.30}$$

Así podemos determinar la amplitud de la corriente en términos de los datos del circuito. Aprovechamos la circunstancia para definir una magnitud llamada **impedancia del circuito**, y habitualmente representada por Z. Dicha magnitud en general relaciona las amplitudes de la tensión entre terminales de la fuente, con la corriente que circula por ella. Esto es

$$V_F = IZ \tag{11.31}$$

En nuestro caso particular, la impedancia es

$$Z = \sqrt{R^2 + (\chi_L - \chi_C)^2} \tag{11.32}$$

Con un procedimiento análogo se obtiene la diferencia de fase ϕ. Reemplazando las relaciones (11.28) en (11.27) tenemos

$$tg\ \phi = \frac{I\chi_L - I\chi_C}{IR} = \frac{\chi_L - \chi_C}{R} \tag{11.33}$$

Cuando el ángulo ϕ toma valores positivos decimos que el circuito es **inductivo**. Por el contrario, si el ángulo ϕ es negativo se dice que el circuito es **capacitivo**. En el caso particular en que ϕ es nulo, decimos que el circuito está en **resonancia**.

11.5. El circuito RLC paralelo

El circuito RLC paralelo se compone de un resistor, un inductor y un capacitor conectados en paralelo con una fuente de tensión alterna como se indica en la Figura 11.6.

Dado que se trata de una conexión en paralelo, la diferencia de potencial instantánea entre los terminales de cada componente es la misma y coincide con la que aporta la fuente. Definamos el origen de los tiempos de modo que la fase inicial de la tensión en la fuente sea nula. Es claro que las corrientes que circulan por cada uno de los dispositivos del circuito serán funciones armónicas

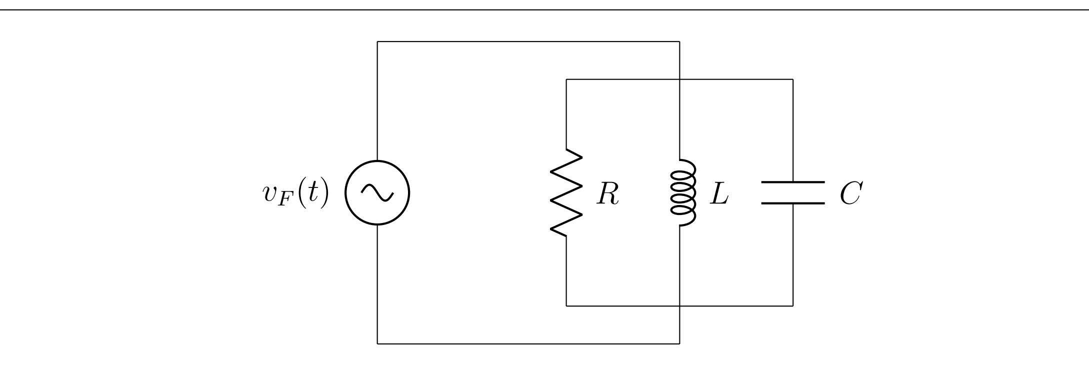


Figura 11.6: Circuito con un resistor, un inductor y un capacitor conectados en paralelo con una fuente de tensión alterna: RLC paralelo

con la frecuencia de la fuente y los desfasajes propios respecto de la tensión en la fuente. Las tensiones en cada uno de los componentes responden a las siguientes formas funcionales:

$$\begin{array}{rcl} v_F(t) & = & V_F \sin(\omega t) \\ i_F(t) & = & I_F \sin(\omega t + \phi) \\ i_R(t) & = & I_R \sin(\omega t) \\ i_C(t) & = & I_C \sin(\omega t + \pi/2) \\ i_L(t) & = & I_L \sin(\omega t - \pi/2) \end{array} \tag{11.34}$$

Aplicando la ley de nodos para un instante en uno de los nodos del circuito tenemos

$$i_F - i_R - i_C - i_L = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad i_F = i_R + i_C + i_L \tag{11.35}$$

Haciendo un trabajo análogo al realizado con un circuito RLC serie, y observando que la suma instantánea de las corrientes en los dispositivos puede ser referida a la componente y de los correspondientes fasores, tenemos

$$\vec{I}_F = \vec{I}_R + \vec{I}_C + \vec{I}_L \tag{11.36}$$

donde hemos expresado la relación entre las respectivas corrientes en lenguaje vectorial. En la Figura 11.7 mostramos el correspondiente diagrama fasorial.

Observando la geometría de la Figura 11.7, podemos determinar la relación entre los vectores de la ecuación (11.36), resultando

$$I_F = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \tag{11.37}$$

Reemplazando las relaciones (11.7), (11.14) y (11.21) en (11.37) resulta

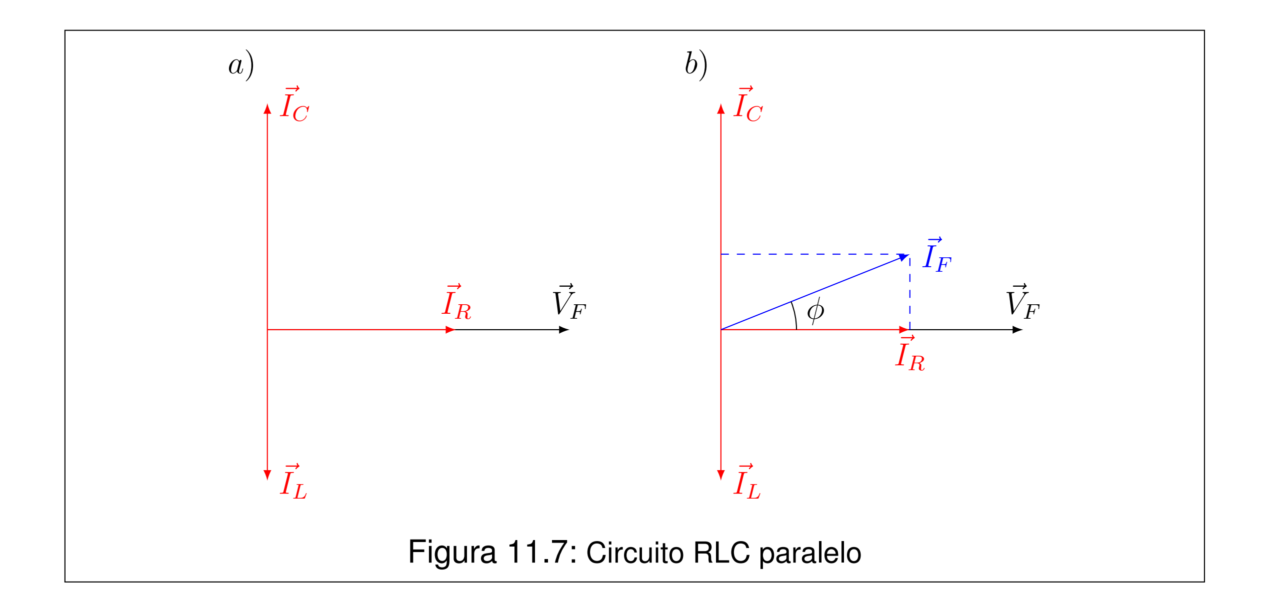


Figura 11.7: Circuito RLC paralelo

$$I_F = \sqrt{\left(\frac{V_F}{R}\right)^2 + \left(\frac{V_F}{\chi_C} - \frac{V_F}{\chi_L}\right)^2} \tag{11.38}$$

Operando algebráicamente y definiendo la **impedancia** como el cociente V_F/I_F tenemos:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\chi_C} - \frac{1}{\chi_L}\right)^2} \tag{11.39}$$

La fase ϕ se obtiene inmediatamente a partir de las relaciones geométricas que se desprenden de la Figura 11.7, resultando:

$$tg(\phi) = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{\frac{V_F}{\chi_C} - \frac{V_F}{\chi_L}}{\frac{V_F}{R}} = \frac{\frac{1}{\chi_C} - \frac{1}{\chi_L}}{\frac{1}{R}} \tag{11.40}$$

Definimos la **condición de resonancia** cuando el ángulo de fase ϕ es nulo.

Queda a cargo del lector la tarea de hallar todas las constantes que definen la solución completa del problema.

11.6. Valores eficaces

El valor medio temporal de cualquier magnitud que oscila armónicamente, es nulo cuando se lo evalúa en un período de dicha oscilación. Por tanto, tal valor medio carece de interés como indicador para las magnitudes relevantes en corriente alterna. Un indicador no nulo es el llamado **valor eficaz**. Sea $u(t)$ una magnitud física oscilante. Su valor eficaz U_e se define como

$$U_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \tag{11.41}$$

En el caso de interés en corriente alterna, en que las magnitudes son del tipo (11.2), tenemos

$$U_e = \; U \; \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\left(\omega t + \delta\right) dt} \tag{11.42}$$

La expresión que queda bajo la raiz cuadrada puede resolverse con un poco de trabajo, o puede encontrarse en una tabla[4]. Su valor es $1/2$, por lo que

$$U_e = \frac{U}{\sqrt{2}} \tag{11.43}$$

11.7. Potencia suministrada por la fuente de tensión alterna

Las fuentes de tensión alterna no suministran energía a un ritmo constante, por lo que cabe definir una **potencia instantánea** dada por

$$p(t) = i_F(t)\; v_F(t) \tag{11.44}$$

[4]En una tabla de integrales definidas, tendremos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\;\; dx \;\; = \;\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\;\; dx \;\; = \;\; \frac{1}{2}$$

Este resultado conviene recordarlo, ya que las integrales que pueden llevarse a esta forma aparecen muy frecuentemente en diversas áreas de la Física y la Ingeniería.

No obstante, podemos establecer un valor medio significativo en virtud de la periodicidad de $p(t)$. Comencemos por recordar que para una función periódica en el tiempo con período T, el valor medio viene dado por

$$< U >= \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \tag{11.45}$$

que en nuestro caso se convierte en

$$< P >= \frac{1}{T} \int_0^T i_F(t)\ v_F(t)\ dt \tag{11.46}$$

El caso más general ocurrirá cuando exista un defasaje ϕ entre la tensión y la corriente, en cuyo caso tendremos

$$< P >= \frac{1}{T} \int_0^T I_F \sin(\omega t)\ \ V_F \sin(\omega t + \phi)\ \ dt \tag{11.47}$$

Recordemos aquí una propiedad de la suma de ángulos

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{11.48}$$

Aplicando esta propiedad tenemos

$$< P >= \frac{I_F V_F}{T} \left[\cos(\phi) \int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt + \sin(\phi) \int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)\, dt\right] \tag{11.49}$$

La segunda integral es nula, mientras que la primera es análoga a la resuelta en la sección anterior. Finalmente tenemos

$$< P >= \frac{1}{2}\ I_F V_F \cos(\phi) \tag{11.50}$$

Recordando la definición de valor eficaz de una magnitud oscilante, podemos reescribir el último resultado como

$$< P >= I_{Fe} V_{Fe} \cos(\phi) \tag{11.51}$$

En terminología técnica, la magnitud $\cos(\phi)$ se denomina **factor de potencia del circuito**. Observando los diagramas fasoriales de los circuitos elementales, vemos que el factor de potencia vale la unidad cuando el circuito es resistivo, y es nulo cuando el circuito es inductivo o capacitivo puro (ver las Figuras 11.5). En el circuito RLC el factor de potencia vale uno en el caso resonante.

11.8. Problemas

1. En el circuito de la Figura 1, los valores de las magnitudes indicadas son $R = 24\,\Omega$, $C = 200\,\mu$F y $L = 12$ mH. Por su parte, la fuente suministra una tensión alterna de amplitud $V_0 = 20$ V y frecuencia $f = 150$ Hz.

   a) Construya el esquema fasorial del circuito, indicando los vectores correspondientes a la corriente y las tensiones en cada dispositivo (incluyendo la fuente).

   b) Determine las reactancias inductiva y capacitiva, la impedancia y el factor de potencia del circuito.

   c) Determine las amplitudes y fases relativas de las tensiones en cada dispositivo, respecto de la fase de la corriente. Luego construya las funciones del tiempo que describen la tensión en cada dispositivo y la corriente del circuito.

   d) Calcule los valores eficaces de la tensión y la corriente en la fuente. Utilice estos resultados para calcular la potencia suministrada por la fuente.

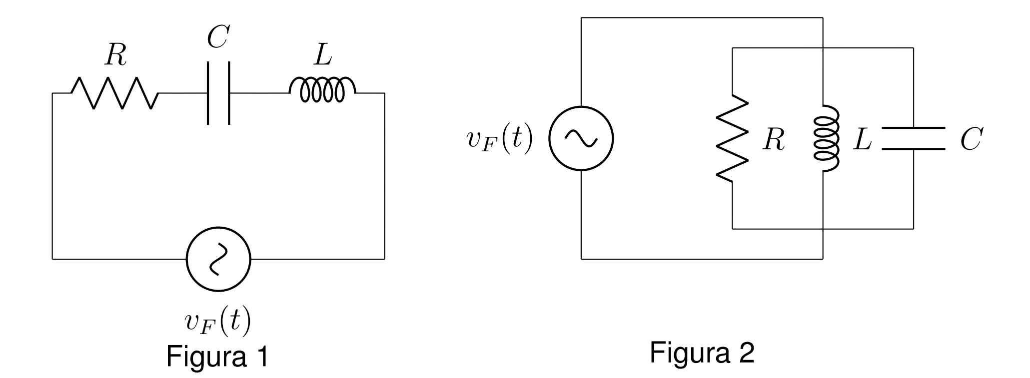


Figura 1 Figura 2

2. Considere nuevamente el circuito del problema anterior. Suponga ahora que la fuente tiene la posibilidad de variar su frecuencia. Encuentre la función de la frecuencia que describe la amplitud de la corriente a través de la fuente $I(\omega)$. Calcule la correspondiente frecuencia de resonancia e indique su localización en los gráficos de $I(\omega)$.

3. Con los mismos dispositivos del circuito del problema 1, se ha construido el circuito 2 que se presenta en la Figura 2.

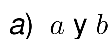
   a) Construya el esquema fasorial indicando la tensión y las corrientes en cada rama del circuito.

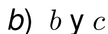
   b) Determine la impedancia y el factor de potencia del circuito.

   c) Calcule las amplitudes y fases de las corrientes en cada rama respecto de la tensión en la fuente.

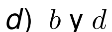
d) Analice las condiciones de resonancia. Para ello, suponga nuevamente que puede variar la frecuencia de la fuente. ¿Qué ocurre en este caso con la amplitud de la corriente en la fuente?

4. Una fuente de tensión alterna cuya amplitud es $V_M = 150$ V y su frecuencia $f = 50$ Hz está conectada entre los puntos A y D de la Figura 3. El resistor posee una resistencia $R = 40\Omega$, el inductor está caracterizado por una inductancia $L = 185$mH y el capacitor tiene una capacidad $C = 65\ \mu$F. Calcule la diferencia de potencial eficaz entre los puntos que se indican.


a) a y b


b) b y c


c) c y d


d) b y d

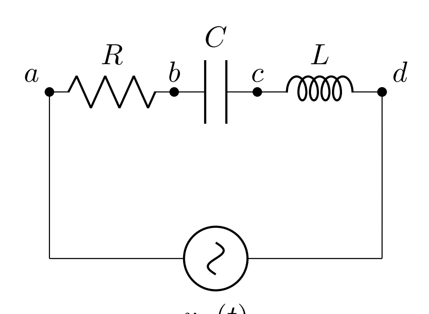


Figura 3

5. Un generador de tensión alterna se conecta a un circuito cuyos componentes y disposición no conocemos. La tensión y corriente instantáneas responden a las siguientes formas funcionales

$$v(t) = 75\ \text{V} \sin(\omega t)$$

$$i(t) = 1,2\ \text{A} \sin(\omega t + 0,2)$$

Se pregunta

a) ¿Cuál es el factor de potencia del circuito?

b) La fem ¿atrasa o adelanta a la corriente?

c) El circuito desconocido, ¿es inductivo o capacitivo?

d) ¿Se encuentra tal circuito en resonancia?

e) El circuito desconocido: ¿contiene un capacitor? ¿un inductor? ¿y un resistor?

f) ¿Qué potencia media le entrega el generador al sistema?

Capítulo 12
Ecuaciones de Maxwell

12.1. Comencemos por una paradoja

Cuando el desarrollo del electromagnetismo estaba bastante avanzado, los investigadores iban por más, hilando fino sobre las leyes ya establecidas. A esta altura de los acontecimientos, era importante determinar si las variaciones temporales del campo eléctrico eran fuentes de "algo", tal como las variaciones del campo de inducción magnética lo eran en virtud de la ley de Faraday. Para analizar esto, podemos pensar en el más simple de los dispositivos que produce campos eléctricos variables: un capacitor en proceso de carga. Como la corriente de carga es variable con el tiempo, no estamos habilitados para aplicar la ley de Ampère (recordar que solo puede aplicarse en magnetostática, donde las corrientes son estacionarias). Sin embargo, una práctica habitual consiste en "forzar" las leyes para evaluar si resisten una generalización. En este marco, consideremos el montaje formado por un capacitor y los conductores de alimentación que permiten su carga. Supongamos además que dicha carga está ocurriendo. Para aplicar la ley de Ampère, elegimos una curva cerrada C, que rodea a uno de los conductores. Como la ley involucra una superficie cualquiera limitada por la curva C, elegimos dos alternativas: la superficie S_1 que es atravesada por el conductor, y la S_2 que pasa por el espacio interior al capacitor (ver Figura 12.1).

Apliquemos la ley de Ampère para ambas alternativas. En la primera el flujo a través de S_1 es mayor que cero debido a que $\vec{J}$ es significativo sobre la sección del conductor. Por el contrario, el flujo sobre S_2 es nulo debido a que dicha superficie no es atravesada por corrientes de conducción.

$$1) \qquad \oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \; = \; \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{ds} \; > \; 0 \tag{12.1}$$

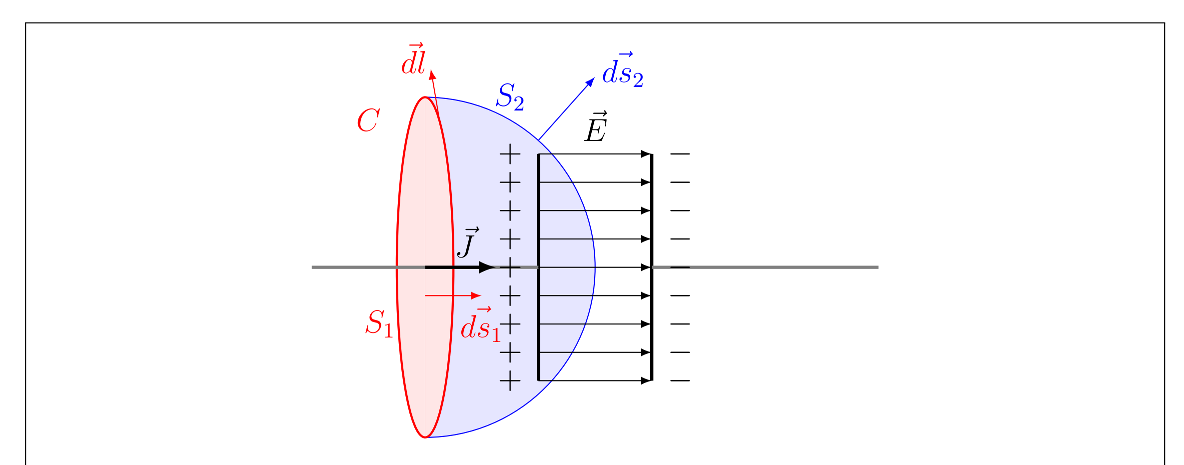


Figura 12.1: Esquema para analizar la paradoja que plantea la inconsistencia de la ley de Ampère en sistemas variables con el tiempo

$$2) \qquad \oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \;=\; \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{ds} \;=\; 0 \tag{12.2}$$

Este resultado adverso, da por tierra con nuestro intento de generalizar la ley de Ampère. Basta este simple contraejemplo para decir que esta ley no admite ser utilizada en casos donde las corrientes varían con el tiempo[1]. Esta paradoja podría considerarse como un disparador para lanzarse a una nueva búsqueda. Hay una ley faltante...

12.2. Ley de Ampère-Maxwell

La ley faltante la propuso Maxwell como una modificación de la ley de Ampère. El hallazgo fue de carácter especulativo, a diferencia de lo sucedido con las leyes previas en la historia del electromagnetismo. La especulación giró alrededor de las variaciones temporales del campo eléctrico, tal como parecía sugerir cierta *simetría* con la ley de Faraday. Aquí presentamos una versión modernizada de la ley de Ampère-Maxwell.

Consideremos una región del espacio en la que existen el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$, el campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r},t)$ y una distribución de corrientes $\vec{J}(\vec{r},t)$, donde todas las magnitudes pueden variar con el tiempo. Sean C una curva cerrada cualquiera y S una superficie limitada por C. Sean $\vec{dl}$ un vector elemental, tangente a la curva C, y $\vec{ds}$ un vector elemental normal a la superficie

[1]Aquí hay que ser cuidadoso. El contraejemplo no invalida la ley de Ampère, sino que indica que no puede generalizarse para hipótesis menos restrictivas. En efecto, la misma solo puede ser usada en el contexto de la magnetostática.

S. Los vectores $\vec{dl}$ y $\vec{ds}$ se eligen de modo que cumplan con la regla de la mano derecha. Entonces, la circulación del campo de inducción magnética $\vec{B}$ a lo largo de la curva C viene dada por

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \;=\; \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \;+\; \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \tag{12.3}$$

Aquí introducimos nueva terminología. Recordemos que el flujo del vector $\vec{J}$ a través de una superficie es lo que definimos como corriente I. A estas magnitudes las referiremos en adelante como **densidad de corriente de conducción** y **corriente de conducción** respectivamente. Observando la ley de Ampère-Maxwell, podemos escribir una forma de bolsillo, introduciendo el concepto de **corriente de desplazamiento** I_D, dada por

$$I_D \;=\; \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \tag{12.4}$$

Entonces la ley puede escribirse como

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \;=\; \mu_0 \;(I + I_D) \tag{12.5}$$

Siguiendo el camino de la analogía, podemos definir una **densidad de corriente de desplazamiento** $\vec{J}_D$ como sigue

$$\vec{J}_D \;=\; \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{12.6}$$

Esta definición podría introducirse en la forma integral (12.3) de la ley de Ampère-Maxwell, imponiéndole la restricción de mantener la curva C y la superficie S invariantes en el tiempo[2]. Entonces tenemos otra forma posible (aunque restringida) de la ley

[2]Con esta restricción sería lícito permutar el operador de derivación con la integral en la forma

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \vec{ds} \;=\; \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \;=\; \mu_0 \int_S \left(\vec{J} + \vec{J}_D\right) \cdot \vec{ds} \tag{12.7}$$

La **corriente de desplazamiento** es una nueva magnitud física, cuya interpretación no es directa. En principio, decimos que es una corriente porque tiene unidades de corriente y opera al mismo nivel que la corriente de conducción en el marco de la teoría. Sin embargo, no implica el movimiento real de cargas. Por otra parte, podemos decir que tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento, pueden darse simultáneamente en un mismo lugar del espacio, ya sea en el vacío como en los medios materiales.

En muchos casos las corrientes de conducción y de desplazamiento en un mismo lugar, difieren en varios órdenes de magnitud, por lo que una de ellas puede despreciarse frente a la otra. Citamos aquí dos ejemplos habituales:

- Dentro de los conductores en régimen estacionario o cuando circulan corrientes de conducción de baja frecuencia, la corriente de desplazamiento puede despreciarse.
- En el vacío libre de cargas y corrientes de conducción, dominará la corriente de desplazamiento.

12.3. Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Los fenómenos electromagnéticos en el vacío pueden describirse completamente si en la región del espacio a estudiar, se especifican los campos eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ y de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r},t)$. Estos campos pueden originarse en la existencia de cargas eléctricas, y en los movimientos de las mismas[3]. Tales “fuentes" se representan mediante las densidades de carga $\rho(\vec{r},t)$ y de corriente $\vec{J}(\vec{r},t)$[4]. La relación espacio-temporal entre los campos (incluyendo el efecto de las fuentes), viene dada por las ecuaciones de Maxwell. En realidad, estas ecuaciones ya son bien conocidas para nosotros, pues provienen de evidencias experimentales y razonamientos teóricos vistos en capítulos anteriores. Sin embargo resulta muy instructivo observarlas en conjunto, para comprender la interrelación entre los campos. Presentaremos aquí sus formas integrales en el vacío, y pospondremos para secciones posteriores el tratamiento de las formas diferenciales. Un detalle sutil consiste en observar que, aún cuando hablamos de vacío,

[3]Veremos más adelante que de las ecuaciones de Maxwell se desprenden otros orígenes posibles para los campos.

[4]Aquí la palabra “fuente" se utiliza en el sentido de causa (en vez de origen).

incluimos las cargas y las corrientes. Ya sabemos que ellas requieren un sustrato material, como por ejemplo un electrón. Sin embargo, un electrón puede estar en el vacío, o inmerso dentro de un medio material. En este tratamiento descartamos los medios materiales que llenan el espacio (por eso decimos vacío), pero admitimos el sustrato material de las cargas.

Ahora preparamos la geometría para las ecuaciones de Maxwell. Consideremos que en cierta región del espacio conviven cargas (posiblemente en movimiento) con campos eléctrico y de inducción magnética. Supongamos que todo puede fluctuar en el tiempo. Necesitamos imaginar dos montajes en el vacío:

1. Sea C_1 una curva cerrada que resulta el límite de una superficie S_1 (naturalmente no cerrada). Llamamos $d\vec{l}_1$ a cada uno de los vectores infinitesimales tangentes a la curva C_1, y $d\vec{S}_1$ a los vectores infinitesimales normales a la superficie S_1. Recuerde que los sentidos de $d\vec{l}_1$ y $d\vec{S}_1$ deben satisfacer la regla de la mano derecha. Entonces podemos enunciar respectivamente las leyes de Faraday y Ampère-Maxwell:

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \tag{12.8}$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 \left[\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \right] \tag{12.9}$$

   En palabras, la ley de Faraday nos dice que la circulación del campo eléctrico sobre la curva C_1, es proporcional a la variación temporal del flujo magnético a través de la superficie S_1. Por su parte, la ley de Ampère-Maxwell expresa que la circulación del campo de inducción magnética a lo largo de la curva C_1 es proporcional a la suma de la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento a través de la superficie S_1.

2. Sea S_2 una superficie cerrada que limita una región del espacio V_2. Supongamos que $d\vec{S}_2$ representa cada vector infinitesimal normal exterior a la superficie S_2, mientras que dV_2 se refiere a cada elemento de volumen de la región V_2. Así las leyes de Gauss eléctrica y magnética son:

$$\begin{aligned} \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_2} \rho \, dV_2 \\ \oint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{12.10}$$

La ley de Gauss para el campo eléctrico establece que el flujo de dicho campo a través de la superficie S_2 es proporcional a la carga residente en la región V_2. La ley de Gauss para el campo inducción magnética establece que el flujo a través de S_2 es siempre nulo.

12.4. El campo electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell ponen en evidencia que los campos eléctrico y de inducción magnética no son independientes cuando experimentan cambios en el tiempo. Esto lleva a pensar que los fenómenos eléctricos y magnéticos son manifestaciones distintas que provienen de una raiz común. En este sentido decimos que la teoría electromagnética es unificadora. Siguiendo esta idea, se suele llamar **campo electromagnético** al par de campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Centremos nuestra atención en las ecuaciones de Maxwell. Observemos que las mismas valen aún cuando los campos y las fuentes dependen del tiempo. Esto sugiere implícitamente una extensión de la validez de algunas de las leyes a contextos más amplios que los estudiados inicialmente. Por ejemplo, las ecuaciones (12.10) han sido introducidas en electrostática y magnetostática respectivamente, y sin embargo siguen valiendo en general. Estas extensiones no son triviales, sino que han exigido rigurosas verificaciones experimentales.

12.5. Ecuaciones de Maxwell en el vacío libre de cargas y corrientes

Una situación especialmente interesante surge cuando en cierta región del espacio existe campo electromagnético en ausencia de cargas y corrientes. En este caso, las ecuaciones de Maxwell toman las formas siguientes

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \tag{12.11}$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 \tag{12.12}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \tag{12.13}$$

$$\oint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \tag{12.14}$$

En este punto podemos observar la gran simetría que presentan las ecuaciones respecto de la forma en que relacionan los campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ y $\vec{B}(\vec{r},t)$. Esta simetría será de importancia crucial en las formulaciones modernas del electromagnetisno, y probablemente haya resulado inspiradora para la formulación de la teoría de la relatividad especial.

12.6. Formas diferenciales

Hasta este punto, hemos tratado siempre con ecuaciones de Maxwell en su formato integral, que resulta muy aconsejable desde el punto de vista didáctico. Sin embargo, resulta operativamente conveniente escribirlas en un formato diferencial, donde campos y fuentes se relacionan localmente. Estas ecuaciones son mucho más versátiles, aunque su significado parece, a primera vista, algo más difícil de comprender.

Para pasar de las formas integrales a las diferenciales, utilizamos los teoremas integrales de Stokes y de Gauss. Bajo las mismas condiciones geométricas con las que enunciamos las ecuaciones de Maxwell, estos teoremas vienen dados por

$$\oint_{C_1} \vec{\eta} \cdot d\vec{l}_1 \;=\; \int_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{\eta}\right) \cdot d\vec{S}_1 \tag{12.15}$$

$$\oint_{S_2} \vec{\eta} \cdot d\vec{S}_2 \;=\; \int_{V_2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\eta}\right) \, dV_2 \tag{12.16}$$

donde $\vec{\eta}$ representa cualquier campo vectorial con debidas condiciones de regularidad. A continuación trataremos cada caso.

Leyes de circulación: comencemos por reconocer que en las leyes de Faraday (12.8) y Ampère-Maxwell (12.9), podemos intercambiar los operadores de derivación con las integrales, suponiendo que la curva C_1 y la superficie S_1 son fijas. En tal caso, los operadores pasan de derivadas totales a parciales. Entonces tendremos

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 \;=\; -\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}_1 \tag{12.17}$$

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot \vec{dl}_1 \;=\; \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}_1 \tag{12.18}$$

Ahora aplicamos el teorema de Stokes (12.15) para convertir las integrales curvilíneas de los primeros mienbros en integrales de superficie. Así tenemos

$$\int_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{dS}_1 \;=\; -\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}_1 \tag{12.19}$$

$$\int_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{dS}_1 \;=\; \int_{S_1} \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}_1 \tag{12.20}$$

Observando que los dominios de integración coinciden a ambos lados, tenemos

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} \;+\; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \cdot \vec{dS}_1 \;=\; 0 \tag{12.21}$$

$$\int_{S_1} \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} \;-\; \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \cdot \vec{dS}_1 \;=\; 0 \tag{12.22}$$

Aquí hay que observar cuidadosamente las expresiones. En general, que una integral valga cero, no implica que el integrando sea nulo. Pero en estos casos sí lo es, porque debe cumplirse que la integral sea nula “para todos" los dominios posibles, es decir, para todas las superficies S_1 que puedan definirse. Entonces tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \;+\; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;=\; 0 \tag{12.23}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \;-\; \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \;=\; 0 \tag{12.24}$$

que constituyen las formas diferenciales buscadas.

Leyes de flujo: este es el caso de las leyes de Gauss eléctrica y magnética (ecuaciones (12.10)). Sobre ellas podemos operar directamente con el teorema de Gauss para convertir las integrales de superficie de los primeros

miembros en integrales de volumen. Esto es

$$\int_{V_2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) dV_2 \;=\; \int_{V_2} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV_2 \tag{12.25}$$

$$\int_{V_2} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) dV_2 \;=\; 0 \tag{12.26}$$

Las integrales de (12.25) tienen el mismo dominio de integración, por lo que pueden escribirse como sigue

$$\int_{V_2} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \;-\; \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] dV_2 \;=\; 0 \tag{12.27}$$

Como las integrales de (12.27) y (12.26) deben anularse para todos los posibles dominios V_2, sus integrandos deben ser nulos. Esto es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \;-\; \frac{\rho}{\epsilon_0} \;=\; 0 \tag{12.28}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \;=\; 0 \tag{12.29}$$

Estas últimas expresiones son las formas diferenciales buscadas.

Una síntesis organizada de las ecuaciones de Maxwell en sus formas diferenciales es la siguiente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \;+\; \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{12.30}$$

Las correspondientes versiones para el caso libre de cargas y corrientes son

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned} \tag{12.31}$$

donde se pone de manifiesto en forma aún más elocuente, la simetría entre los campos dentro de las ecuaciones.

12.7. Ondas electromagnéticas

Para afrontar la deducción de la ecuación diferencial que describe las ondas electromagnéticas en el vacío, comenzamos por recordar una identidad vectorial

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\eta} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\eta} \right) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\eta} \right) \tag{12.32}$$

donde η representa un campo vectorial regular y $\vec{\nabla}^2$ es el operador laplaciano. Aplicando esta identidad a los campos eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en el vacío libre de cargas y corrientes, tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right)
\end{aligned} \tag{12.33}$$

donde utilizamos que en las condiciones mencionadas, las divergencias son nulas. Ahora reemplazamos los rotores y luego permutamos los operadores espaciales y temporales. Así tenemos

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} \;&=\; -\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \;=\; \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} \;&=\; -\vec{\nabla} \times \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \;=\; -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)
\end{aligned}
\tag{12.34}
$$

Finalmente, volvemos a reemplazar los rotores, y operando obtenemos

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} \;&=\; \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \;=\; \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} \;&=\; -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \;=\; \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{12.35}
$$

Las ecuaciones diferenciales (12.35) son ecuaciones de onda en formato tridimensional. Pero aún falta analizar el factor que acompaña las derivadas temporales, que dicho sea de paso, es el mismo en ambos casos. En primer lugar, observemos que las constantes involucradas son ϵ_0 y μ_0. La primera proviene de la base misma de la electrostática, mientras que la segunda surgió con los primeros fenómenos magnéticos. Nada parece indicar a priori, que entre ellas debiera haber alguna relación. Sin embargo, esconden una relación sorprendente. Desarrollemos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \;&=\; \sqrt{\frac{4\pi k}{\mu_0}} \;=\; \sqrt{\frac{4\pi \, 9 \times 10^9 \, \text{N m}^2 \, \text{C}^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \, \text{T m A}^{-1}}} \;= \\
&=\; \sqrt{\frac{9 \times 10^{16} \, \text{N m}^2 \text{C}^{-2}}{\text{N C}^{-1} \text{m}^{-1} \text{s m C}^{-1} \text{s}}} \;= \\
&=\; \sqrt{9 \times 10^{16} \, \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \;=\; 3 \times 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}
\tag{12.36}
$$

Este resultado constituye nada menos que la **rapidez de la luz en el vacío**, a la que en lo sucesivo denotaremos por c.

$$c = 3 \times 10^8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{12.37}$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales de onda toman la forma siguiente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{12.38}$$

12.8. Soluciones armónicas planas

Las ecuaciones diferenciales de onda admiten soluciones tridimensionales múltiples, entre las que resulta especialmente simple la solución plana armónica dada por

$$\begin{aligned} \vec{E}(z,t) &= \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \\ \vec{B}(z,t) &= \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t + \phi) \end{aligned} \tag{12.39}$$

donde $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ son las amplitudes de los campos eléctrico y de inducción magnética respectivamente, k es el múmero de onda, ω es la frecuencia angular y ϕ la fase inicial. Nótese que el eje z positivo se ha elegido (sin pérdida de generalidad) en la dirección y sentido de propagación de la onda. Apliquemos las ecuaciones de Maxwell para establecer condiciones sobre las amplitudes. Veamos qué ocurre con las divergencias nulas. Como los campos dependen solo de la coordenada z, tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{12.40}$$

Con esto, podemos asegurar que las componentes E_z y B_z no pueden depender de la coordenada z. Entonces la única posibilidad compatible con (12.39) es

$$E_z \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad B_z \;=\; 0 \tag{12.41}$$

De este resultado concluimos que las ondas electromagnéticas planas son transversales. Supongamos entonces que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ está linealmente polarizado en la dirección del eje x[5]. Entonces puede escribirse como sigue

$$\vec{E}\,(z,t) \;=\; E_0 \sin\left(kz - \omega t + \phi\right)\,\breve{\imath} \tag{12.42}$$

Buscaremos ahora, qué restricción imponen las ecuaciones de Maxwell sobre la amplitud del campo de inducción magnética $\vec{B}(\vec{r},t)$. Para ello utilizamos la ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \;= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{12.43}$$

Desarrollemos el rotor

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \;=\; \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \;=\; \frac{\partial E_x}{\partial z}\,\breve{\jmath} \tag{12.44}$$

Reemplazando en (12.43) y recordando que el campo $\vec{B}$ no tiene componente B_z, tenemos

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}\,\breve{\jmath} \;=\; -\frac{\partial}{\partial t}\left(B_x\breve{\imath} + B_y\breve{\jmath}\right) \tag{12.45}$$

de donde concluimos que

$$B_x \;=\; 0 \tag{12.46}$$

[5]Se dice que una onda electromagnética plana (que es naturalmente transversal) es linealmente polarizada cuando el vector campo eléctrico $\vec{E}$ tiene una única dirección en todo el espacio y para todo tiempo. Este concepto será retomado en capítulos posteriores para darle un tratamiento más extenso.

y que

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \;=\; -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{12.47}$$

Las formas explícitas de las componentes no nulas son

$$\begin{aligned} E_x\,(z,t) \;&=\; E_0\,\sin\left(kz-\omega t+\phi\right) \\ B_y\,(z,t) \;&=\; B_0\,\sin\left(kz-\omega t+\phi\right) \end{aligned} \tag{12.48}$$

Resolviendo las derivadas de (12.47) tenemos

$$kE_0\,\cos\left(kz-\omega t+\phi\right) \;=\; \omega B_0\,\cos\left(kz-\omega t+\phi\right) \tag{12.49}$$

de donde concluimos que

$$kE_0 \;=\; \omega B_0 \tag{12.50}$$

Recordando que

$$\frac{\omega}{k} \;=\; \frac{2\pi\omega}{2\pi k} \;=\; f\lambda \;=\; c \tag{12.51}$$

encontramos una relación sumamente simple entre las amplitudes de campos:

$$E_0 \;=\; c\,B_0 \tag{12.52}$$

Nótese que esta relación puede extenderse al valor instantáneo de los campos

$$E_x\,(z,t) \;=\; c\,B_y\,(z,t) \tag{12.53}$$

12.9. Aspectos energéticos

Para afrontar el análisis energético de los fenómenos electromagnéticos en el vacío, cuando en la región no hay ni cargas ni corrientes, deben considerarse las **densidades volumétricas de energía residente en los campos**. Dichas densidades en una posición y a un tiempo serán

$$u_e(\vec{r},t) \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\,E^2(\vec{r},t) \qquad u_m(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{2\mu_0}\,B^2(\vec{r},t) \tag{12.54}$$

Siguiendo la misma línea, definimos la **densidad de energía electromagnética en un punto y a un tiempo** como

$$u_{em}(\vec{r},t) \;=\; u_e(\vec{r},t) \;+\; u_m(\vec{r},t) \tag{12.55}$$

Hasta aquí, las definiciones son generales. Ahora trataremos el caso especial en que los campos se relacionan como los de una onda plana, según la relación (12.53). En estas condiciones, la densidad de energía magnética puede tratarse como sigue

$$u_m \;=\; \frac{B^2}{2\mu_0} \;=\; \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} \;=\; \frac{\epsilon_0\mu_0 E^2}{2\mu_0} \;=\; \frac{\epsilon_0}{2}\,E^2 \tag{12.56}$$

con lo que la densidad de energía electromagnética toma la forma simple siguiente

$$u_{em}(\vec{r},t) \;=\; \epsilon_0\,E^2(\vec{r},t) \tag{12.57}$$

Ahora escribimos la densidad de energía electromagnética para el caso particular de una onda del tipo (12.39). Esto es

$$u_{em}(z,t) \;=\; \epsilon_0\,E_0^2\,\sin^2(kz-\omega t+\phi) \tag{12.58}$$

El **valor medio temporal de la densidad de energía en un punto**, lo denotaremos por $< u_{em} >$. El mismo viene dado por

$$< u_{em} > = \;\frac{1}{T}\int_0^T\; u_{em}\,dt \;=\; \epsilon_0\,E_0^2\,\left[\,\frac{1}{T}\int_0^T\;\sin^2(kz-\omega t+\phi)\;dt\right] \tag{12.59}$$

para resolver la integral proponemos un cambio de variable dado por

$$v \;=\; kz-\omega t+\phi \qquad dv \;=\; -\omega\,dt \tag{12.60}$$

Además observemos que

$$\omega T \;=\; 2\pi f \,\frac{1}{f} \;=\; 2\pi \tag{12.61}$$

entonces

$$< u_{em} > = \; \epsilon_0 \, E_0^2 \, \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 (v) \; dv \right] \tag{12.62}$$

Esta es una integral tabulada muy frecuente, cuyo resultado es $1/2$. Entonces concluimos que

$$< u_{em} > = \; \frac{1}{2} \, \epsilon_0 E_0^2 \tag{12.63}$$

Observe que este resultado no depende de la posición. Esto no será así en general, sino que es una consecuencia de que la onda es plana e infinitamente extendida. Sin embargo, la forma de la expresión será válida, asumiendo que la dependencia espacial la tiene la amplitud E_0.

12.10. Vector de Poynting

El **vector de Poynting** constituye un campo verctorial asociado al campo electromagnético que se define como

$$\vec{S}\,(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{\mu_0} \, \vec{E}\,(\vec{r},t) \,\times\, \vec{B}\,(\vec{r},t) \tag{12.64}$$

Nosotros abordaremos su significado en relación con las ondas electromagnéticas planas. En este caso toma la forma

$$\vec{S}\,(z,t) \;=\; \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \; \sin^2 (kz - \omega t + \phi) \;\; \breve{k} \tag{12.65}$$

Nótese que el producto vectorial hace que el vector de Poynting adquiera la dirección y sentido de la propagación de la onda. Trabajemos ahora sobre el factor constante que acompaña al seno cuadrado. Utilizando (12.37) y (12.52) tenemos

$$\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{c E_0^2}{\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 c E_0^2}{\mu_0} = \epsilon_0 c E_0^2 \tag{12.66}$$

con lo que el vector de Poynting toma la forma

$$\vec{S}\,(z,t) = \epsilon_0 c E_0^2 \, \sin^2(kz - \omega t + \phi) \; \breve{k} \tag{12.67}$$

Ahora analizamos el valor medio temporal del vector de Poynting. Para ello aplicamos la definición habitual

$$< \vec{S} > = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}\, dt = \epsilon_0 c E_0^2 \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kz - \omega t + \phi)\; dt \right] \breve{k} \tag{12.68}$$

La integral del corchete es idéntica a la resuelta en (12.59), y su resultado vale $1/2$. Entonces

$$< \vec{S} > = \frac{1}{2}\, \epsilon_0 c E_0^2 \; \breve{k} \tag{12.69}$$

Aquí nuevamente obtenemos un resultado independiente de la posición que no puede ser tratado como general, sino que solo será válido para el caso de ondas planas. Ahora indaguemos sobre su significado. Para ello imaginemos que la onda viene propagándose, de modo que ya ha avanzado sobre el semiespacio $z < 0$. Entonces el primer frente de onda se encuentra en el plano $z = 0$. Para fijar ideas, tomemos un círculo de área A contenido en el primer frente de onda y centrado en el eje z. Cuando la onda avanza durante un tiempo Δt, el círculo viaja con el frente de onda una distancia $c\,\Delta t$. Todos los puntos por los que pasó el círculo, forman un cilindro de área A y longitud $c\,\Delta t$, dentro del cual ahora oscilan los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, dando lugar a una densidad volumétrica de energía cuyo valor medio temporal en cada punto viene dado por (12.63). Si Δt es bastante grande comparado con el período T de oscilación de los campos, la energía residente en el volumen cilíndrico es

$$U_{em} = < u_{em} > \; A c\,\Delta t = \frac{1}{2}\, \epsilon_0 E_0^2 \, A c\,\Delta t \tag{12.70}$$

Pero la energía residente en el volumen cilíndrico coincide con la que atravesó el círculo original en el tiempo Δt. Por tanto, si quisiéramos saber la energía que

atravesó el círculo por unidad de área y unidad de tiempo, hacemos

$$\frac{U_{em}}{A\,\Delta t} \;=\; \frac{1}{2}\,\epsilon_0 c\,E_0^2 \tag{12.71}$$

Comparando este resultado con (12.69) podemos construir una interpretación física del valor medio temporal de este vector: *el módulo del vector de Poynting representa la densidad media de flujo de energía transportada por la onda, por unidad de área y unidad de tiempo.* A esta magnitud se la suele denominar **intensidad o irradiancia de la onda electromagnética**, y se la denota por I. Una interpretación en términos habituales de los análisis energéticos podríamos expresarla de la siguiente manera: *la irradiancia es la potencia media por unidad de área transportada por una onda electromagnética*.

12.11. Problemas

1. Un capacitor de placas plano paralelas está formado por dos discos metálicos de radio $R = 5$ cm, separados una distancia $d = 1$ mm. Suponga que los cables de alimentación son rectos, muy largos, perpendiculares a las placas y soldados al punto central de cada uno de los discos. Suponga, además, que el capacitor está inicialmente cargado con $Q_0 = 100\,\mu$C y se descarga a través de un resistor de $R = 10\,$MΩ.

    a) Escriba expresiones para la corriente en el conductor, la carga del capacitor y el campo eléctrico dentro del mismo, como funciones del tiempo.

    b) Calule la corriente en el conductor, cuando han transcurrido $0,4$ ms de iniciada la descarga.

    c) Determine la corriente de desplazamiento dentro del capacitor en el mismo instante y verifique que coincida con el resultado del apartado anterior.

    d) En el mismo instante, determine el campo de inducción magnetica $\vec{B}$ como función de la posición dentro y fuera del capacitor.

2. Considere una onda electromagnética plana monocromática y armónica, cuyo campo eléctrico viene dado por

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\breve{\imath}$$

    a) ¿Cuál es la dirección de propagación? Pruebe que no hubiera sido posible que el campo eléctrico estuviera en la dirección de propagación.

    b) ¿En qué dirección y sentido estará el campo de inducción magnética?

    c) Encuentre una relación entre las amplitudes de los campos eléctrico y de inducción magnética.

3. Determine las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de las ondas en los siguientes casos:

    a) Onda de radio recibida a una distancia de 100 Km de la emisora, cuando la misma emite con una potencia de 100 Kw.

    b) Radiación recibida en un panel solar cuando la intensidad medida en la región es de $1,4$ cal cm^{-2} min^{-1}.

    c) Radiación emitida por un laser de CO_2 de 3 Kw, enfocado sobre un área de 10^{-5} cm^2.

Capítulo 13
Campos en medios materiales

13.1. Generalidades

La interpretación actual acerca de la composición íntima de la materia, nos lleva a imaginar moléculas, átomos e iones, tomando parte en enlaces químicos que involucran a los electrones en complejos y vertiginosos movimientos. Cuando estos sistemas son afectados por campos eléctricos o campos de inducción magnética, resulta evidente que su organización interna de cargas se verá perturbada. Nuevas organizaciones de cargas y corrientes se harán macroscópicamente significativas, dando lugar a nuevos campos que se sumarán a los externos. Esos fenómenos pueden resultar de una complejidad inabordable, si se pretende un análisis microscópico detallado. Sin embargo, la mayoría de los medios admiten un modelo macroscópico relativamente simple, en el que se pueda tratar la conexión local entre los campos aplicados y la respuesta del medio.

Los modelos macroscópicos que describen la respuesta de los medios han sido elaborados en forma empírica en las primeras etapas de desarrollo de la teoría electromagnética. Pero desde los inicios de la mecánica cuántica y la mecánica estadística, los modelos teóricos evolucionaron sin pausa hasta el presente. Nosotros no avanzaremos sobre los modelos que investigan la causa microscópica de la respuesta de los medios. Nos restringiremos a discutir el más simple de los abordajes posibles, basado en la caracterización de la respuesta, a partir de imaginar una distribución de fuentes que la origine. Estamos interesados en estudiar la influencia de campos eléctricos y de inducción magnética. Ellos dan lugar respectivamente a los fenómenos de **polarización** y **magnetización**. Por tanto las fuentes de campos que originan estos fenómenos serán las cargas de polarización y las corrientes de magnetización. En las secciones siguientes, daremos breves descripciones fenomenológicas para cada caso.

La mayor parte de los materiales tienen respuestas eléctricas y magnéticas

que desaparecen cuando dejan de ser afectados por campos externos. Sin embargo, algunos materiales tienen efectos remanentes. Esto es, conservan cierto estado de polarización o magnetización, aún cuando el campo externo que indujo el fenómeno ya no está presente. Los materiales con tales propiedades se llaman **ferroeléctricos** y **ferromagnéticos**. Los primeros son muy poco frecuentes. Por el contrario, los ferromagnéticos abundan, y son objeto de permanentes progresos científicos y tecnológicos.

13.2. Aspectos termodinámicos

Ahora nos referiremos brevemente a cuestiones de índole termodinámica. Los campos eléctrico $\vec{E}$ y de inducción magnética $\vec{B}$ suelen llamarse **inductivos** (aunque no formalmente), en alusión a su propiedad de promover cierto tipo de conductas en las estructuras microscópicas de la materia[1]. Pero estas “sugerencias" de los campos compiten con la dinámica intrínseca de las partículas del medio material. ¿Qué podemos decir de esta dinámica? Fundamentalmente que se rige por las interacciones electromagnéticas microscópicas, activadas por la energía térmica residente en el medio. Esto significa que los campos tratan de establecer un orden interno, mientras la agitación térmica trata de impedirlo. Esta imagen, aunque aún difusa, nos permite intuir que la eficacia inductiva de los campos no solo dependerá de las propiedades del medio, sino también de su estado termodinámico.

13.3. Homogeneidad e isotropía

La respuesta de los medios materiales frente a los campos eléctrico y de inducción magnética puede ser muy diversa. Si pensamos por ejemplo en cuerpos sólidos, la distribución de materia puede ser muy diferente si se comparan distintas partes del cuerpo. En tal sentido, decimos que en general los cuerpos son “no homogéneos", y la densidad de masa es una función de la posición. Como la respuesta electromagnética local depende de las características locales de la materia, la inhomogeneidad también se manifiesta en dicha respuesta. Por supuesto, esto puede extenderse a líquidos y gases, reconociendo además que la inhomogeneidad también puede originarse en diferencias termodinámicas entre las partes del cuerpo considerado. Por ejemplo, en la atmósfera terrestre obser-

[1] Reflexione el lector sobre el significado del verbo “inducir". Aquí el vocablo da cuenta de cierta “sugerencia" del campo, que “invita" a las partículas a participar en una organización colectiva. Pero note que “no obliga".

vamos diferencias en la concentración de componentes, en la densidad, en la temperatura, en la presión, etc.

Cuando los cuerpos pueden modelarse omitiendo las diferencias mencionadas en relación con su respuesta electromagnética, decimos que el cuerpo es **homogéneo**, y su respuesta es independiente de la posición.

La organización de la materia, especialmente en el estado sólido, suele definir direcciones preferenciales dentro de la estructura que se forma. Tal vez, el ejemplo más elocuente sea la forma de agregación de los cristales. Quienes se dedican al corte de cristales (por ejemplo diamantes), saben que hay direcciones en las que el corte es fácil, mientras que en otras direcciones, es muy difícil. Así aparecen propiedades que dependen de la orientación dentro del cuerpo, en cuyo caso decimos que el medio es **anisotrópico**. Esta característica algunas veces se manifiesta en la respuesta elctromagnética del medio, por lo que la misma se considera anisotrópica.

Cuando la respuesta de un medio puede modelarse despreciando la dependencia con la orientación, decimos que el medio es **isotrópico** o **isótropo**.

En los tratamientos que desarrollaremos aquí, nos restringiremos al caso en que los medios son simultáneamente homogéneos e isótropos. Sin embargo, algunos casos que se mencionan en capítulos más avanzados, requerirán tratamientos especiales que analizaremos oportunamente.

13.4. Polarización de medios dieléctricos

Ahora trataremos brevemente lo que ocurre a nivel microscópico en un medio material no conductor (dieléctrico), cuando el mismo es afectado por un campo eléctrico. En principio, podemos imaginar que cada molécula tiene un **centro de carga positiva** y un **centro de carga negativa** (para imaginar esto, conviene recordar el concepto de centro de masa). No nos preocuparemos aquí del modo en que se calculan, solo observaremos que se trata de los puntos del espacio intramolecular en los que podemos suponer concentradas las cargas positiva y negativa. Estos puntos pueden coincidir o no. Si no coinciden, la molécula (neutra) tiene el aspecto de un dipolo, y el momento dipolar asociado será un vector orientado al azar, y variando por razones termodinámicas.

¿Qué pasa cuando se aplica un campo eléctrico? Si los centros de carga coinciden, el campo los separará, llevando el centro positivo a favor y el centro negativo en contra de su orientación. El proceso de separación sigue hasta que las fuerzas internas de la molécula neutralizan la fuerza eléctrica sobre el sistema de cargas. Si la molécula tenía un momento dipolar eléctrico propio, el campo eléctrico buscará orientarlo, para luego aumentar la separación entre sus centros de carga. Estos procesos se repiten sobre cada molécula y siempre compiten con

la agitación térmica del sistema.

En síntesis, podemos decir que el efecto que produce el campo eléctrico sobre el medio material puede traducirse en una densidad volumétrica de dipolos eléctricos microscópicos. Esta densidad admite una representación vectorial a la que se la identifica con $\vec{P}(\vec{r},t)$. Su nombre completo sería **densidad volumétrica de momento dipolar eléctrico inducido**, pero en homenaje a la simplicidad se lo bautizó como **vector polarización**. En medios isótropos y homogéneos, su dirección y sentido coincide con la dirección y sentido del campo eléctrico en el punto.

La polarización del material aporta una nueva contribución al campo preexistente, con manifestaciones tanto dentro como fuera del medio material. La manifestación interna podría describirse como una “atenuación" del campo externo dentro del medio, aunque no conviene tomar esto en forma demasiado literal[2]. Lo cierto es que el nuevo campo agregado puede considerarse como consecuencia de la aparición de nuevas fuentes escalares, llamadas **cargas de polarización**. Estas cargas surgen de la separación microscópica en las moléculas, pero no son libres de circular en el medio. Por analogía, es posible definir una **densidad volumétrica de carga de polarización**, a la que llamaremos $\delta_P(\vec{r},t)$. En el contexto de nuestro modelo, el campo $\vec{P}(\vec{r},t)$, y la densidad de cargas de polarización $\delta_P(\vec{r},t)$ se relacionan por

$$\oint_S \vec{P}\cdot\vec{ds} \;=\; -\int_V \delta_P\,dv \tag{13.1}$$

donde S es una superficie cerrada cualquiera y V es el volumen limitado por ella (los vectores $\vec{ds}$, como siempre, son normales exteriores). Como el campo eléctico $\vec{E}$ posee ahora un nuevo tipo de fuentes, la ley de Gauss conduce a

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\int_V (\delta+\delta_P)\;dv \;=\; \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_V \delta\,dv \;+\; \int_V \delta_P\,dv\right] \tag{13.2}$$

La última integral puede reemplazarse de acuerdo con (13.1). Entonces

$$\epsilon_0\;\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} \;=\; \int_V \delta\,dv \;-\; \oint_S \vec{P}\cdot\vec{ds} \tag{13.3}$$

Reordenando tenemos que

[2]Este debilitamiento del campo interno es el que da origen al nombre genérico de dieléctricos para los materiales no conductores.

$$\oint_S \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot \vec{ds} \;=\; \int_V \delta \, dv \tag{13.4}$$

Aquí introducimos un nuevo campo vectorial $\vec{D}(\vec{r},t)$ llamado **campo de desplazamiento**, cuyas fuentes escalares son exclusivamente las cargas libres.

$$\vec{D} \;=\; \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{13.5}$$

Entonces tenemos

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \;=\; \int_V \delta \, dv \tag{13.6}$$

A la relación entre el campo de desplazamiento $\vec{D}(\vec{r},t)$ y el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$, se la denomina **ecuación constitutiva** del material. La forma de tal relación depende de la respuesta eléctrica del medio. En general, decimos que $\vec{D}$ es una función de $\vec{E}$

$$\vec{D}\,(\vec{r},t) \;=\; f\left[\,\vec{E}\,(\vec{r},t)\right] \tag{13.7}$$

En medios lineales, isótropos y homogéneos la relación toma la forma siguiente

$$\vec{D}\,(\vec{r},t) \;=\; \epsilon\,\vec{E}\,(\vec{r},t) \tag{13.8}$$

donde ϵ es una constante que depende del material llamada **permitividad eléctrica**. La respuesta del medio también puede describirse mediante otras constantes relacionadas. Estas son la **susceptibilidad eléctrica** χ_E y la **constante dieléctrica** K_E. La primera queda definida por

$$\vec{P}\,(\vec{r},t) \;=\; \chi_E\,\vec{E}\,(\vec{r},t) \tag{13.9}$$

mientras que las tres constantes se relacionan por

$$\epsilon \;=\; \epsilon_0 + \chi_E \qquad K_E \;=\; \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \;=\; 1 + \frac{\chi_E}{\epsilon_0} \tag{13.10}$$

Los valores de estas constantes en el vacío son

$$\epsilon = \epsilon_0 \qquad K_E = 1 \qquad \chi_E = 0 \tag{13.11}$$

13.5. Magnetización en medios diamagnéticos y paramagnéticos

Volvamos al mundo microscópico para imaginar la interacción de las moléculas con un campo de inducción magnética externo. Comencemos por modelar la molécula, reconociendo en ella la existencia de cargas eléctricas en movimiento, que admiten ser interpretadas como fuentes vectoriales de un campo de inducción magnética molecular. El modelo más simple consiste en imaginar a la molécula como un **dipolo magnético** (pensemos por ejemplo, en una espira con corriente). El **momento dipolar magnético** asociado a cada molécula, será un vector aleatoriamente orientado dentro del cuerpo, que fluctúa animado por la agitación térmica. En condiciones libres de interacciones con campos externos, estos materiales no generan campos de inducción magnética macroscópicamente observables, debido a la compensación estadística de los campos microscópicos.

Ahora supongamos que se aplica un campo de inducción magnética sobre el material. El mismo intentará orientar los vectores de momento dipolar magnético moleculares, compitiendo con el desorden térmico (¿desorden?). Tal alineación existe, pero experimentalmente se observa que algunos materiales tienden a que sus momentos dipolares sean paralelos al campo de inducción magnética, mientras que otros optan por ponerse antiparalelos. En el primer caso se dice que son materiales **paramagnéticos**, y en el segundo caso se llaman **diamagnéticos**. En cualquiera de los casos, aparecerá una **densidad volumétrica de momento dipolar magnético inducido** a la que denotaremos por $\vec{M}(\vec{r},t)$ y llamaremos simplemente **magnetización**. Consistentemente con nuestro modelo supersimplificado, diremos que la magnetización $\vec{M}(\vec{r},t)$ puede interpretarse como el efecto macroscópico originado por un nuevo tipo de fuentes vectoriales, llamadas **corrientes de magnetización**. Estas fuentes vectoriales serán identificadas por $\vec{J}_m(\vec{r},t)$, y deben jerarquizarse como un aporte similar al de la densidad de corriente de conducción $\vec{J}(\vec{r},t)$. Su relación con la magnetización será

$$\oint_C \vec{M} \cdot \vec{dl} = \int_S \vec{J}_m \cdot \vec{ds} \tag{13.12}$$

donde C es una curva cerrada cualquiera y S es una superficie limitada por C. Los vectores $\vec{dl}$ y $\vec{ds}$ cumplen con la regla de la mano derecha. La relación de $\vec{J}_m$ con la inducción magnética $\vec{B}$, surge de considerar a la densidad de corriente de magnetización simplemente agregada a la de conducción. Sin embargo, la cuestión tiene un ingrediente adicional. La ley de Ampère-Maxwell vincula al campo $\vec{B}$ con dos tipos de fuentes vectoriales: las densidades de corriente y las variaciones temporales del campo eléctrico. Dentro del medio material, debemos incluir entonces, los aportes de la magnetización y la polarización respectivamente, en cada tipo de fuente. Entonces la ley de Ampère-Maxwell toma la forma siguiente

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \;=\; \mu_0 \left[\int_S \left(\vec{J} + \vec{J}_m \right) \cdot \vec{ds} \;+\; \frac{d}{dt} \int_S \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) \cdot \vec{ds} \right] \qquad (13.13)$$

Reconociendo el vector desplazamiento, y separando integrales de flujo, tenemos

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{dl} \;=\; \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \;+\; \int_S \vec{J}_m \cdot \vec{ds} \;+\; \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \qquad (13.14)$$

Reemplazando la integral de flujo de $\vec{J}_m$ por la integral curvilínea de $\vec{M}$ según (13.12), obtenemos

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{dl} \;=\; \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \;+\; \int_C \vec{M} \cdot \vec{dl} \;+\; \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \qquad (13.15)$$

Luego, podemos agrupar las integrales curvilíneas

$$\oint_C \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot \vec{dl} \;=\; \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \;+\; \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \qquad (13.16)$$

Aquí seguimos un lineamiento similar al utilizado para el caso eléctrico. Definimos un vector $\vec{H}(\vec{r}, t)$ al que llamaremos **excitación magnética**, dado por

$$\vec{H} \;=\; \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \qquad (13.17)$$

Con lo que (13.16) toma la forma

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} \; = \; \int_S \vec{J} \cdot \vec{ds} \; + \; \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \tag{13.18}$$

Así tenemos un nuevo campo vectorial $\vec{H}(\vec{r})$ que, aún en el contexto del medio material, tiene como fuentes vectoriales a las corrientes de conducción.

Ahora exploramos una manera de referir las propiedades magnéticas de cada medio. Comenzamos por suponer que la excitación magnética $\vec{H}(\vec{r}, t)$ en cada punto es función de la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en dicho punto

$$\vec{H}\,(\vec{r}, t) \; = \; f\left[\vec{B}\,(\vec{r}, t)\right] \tag{13.19}$$

Siempre comenzamos por suponer que la relación es lineal, mientras que la Naturaleza no se encargue de mostrarnos lo contrario. Además suponemos que el medio es isótropo y homogéneo. Procediendo de un modo análogo al caso eléctrico, proponemos la relación

$$\vec{B}\,(\vec{r}, t) \; = \; \mu\,\vec{H}\,(\vec{r}, t) \tag{13.20}$$

donde μ es una constante característica del material que se denomina **permeabilidad magnética**. También puede definirse una **susceptibilidad magnética** mediante la relación

$$\vec{M}\,(\vec{r}, t) \; = \; \chi_M\,\vec{H}\,(\vec{r}, t) \tag{13.21}$$

Reemplazando estas definiciones en (13.19) tenemos

$$1 \; = \; \frac{\mu}{\mu_0} - \chi_M, \tag{13.22}$$

expresión que suministra una relación entre μ y χ_M. Otra magnitud de uso frecuente es la **constante magnética** K_M dada por

$$K_M \; = \; \frac{\mu}{\mu_0} \; = \; 1 + \chi_M \tag{13.23}$$

Todas estas magnitudes pueden ser evaluadas en el vacío, donde toman los valores siguientes

$$\mu \;=\; \mu_0 \qquad K_M \;=\; 1 \qquad \chi_M \;=\; 0 \tag{13.24}$$

13.6. Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

El conjunto de consideraciones hechas con relación a la respuesta de los medios materiales en presencia de campos eléctricos y de inducción magnética, requiere una adaptación de las ecuaciones de Maxwell. Esta reformulación suele referirse como **formulación macroscópica de las ecuaciones de Maxwell**, e involucra los campos $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{D}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ y $\vec{H}(\vec{r},t)$[3]. Las nuevas formas integrales, referidas a los mismos escenarios geométricos que las correspondientes formas en el vacío, son

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} &= -\frac{d}{dt}\int_{S'} \vec{B}\cdot\vec{ds}\,' \\
\oint_C \vec{H}\cdot\vec{dl} &= \int_{S'} \vec{J}\cdot\vec{ds}\,' + \frac{d}{dt}\int_{S'} \vec{D}\cdot\vec{ds}\,' \\
\oint_S \vec{D}\cdot\vec{ds} &= \int_V \delta\, dv \\
\oint_S \vec{B}\cdot\vec{ds} &= 0
\end{aligned} \tag{13.25}$$

donde δ es la **densidad volumétrica de carga libre**, $\vec{J}$ es la **densidad volumétrica de corriente de conducción**, y ambas son funciones de la posición y del tiempo (igual que los campos).

Utilizando los teoremas de Gauss y de Stokes, en forma análoga a la utilizada en las ecuaciones de Maxwell en el vacío, construimos las correspondientes formas diferenciales

[3] La denominación “macroscópica" se debe a que los campos mencionados son en realidad promedios espacio-temporales tratados en forma estadística.

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \delta \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{13.26}
$$

El cuadro de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas se completa especificando la ecuaciones constitutivas del medio material. En el modelo que utilizamos aquí, las ecuaciones constitutivas son

$$
\begin{aligned}
\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\
\vec{B} &= \mu \vec{H}
\end{aligned}
\tag{13.27}
$$

donde ϵ y μ son constantes escalares, que revelan el carácter isótropo y homogéneo de los medios. Aquí debemos enfatizar que el tratamiento de medios con respuesta más compleja requiere ecuaciones constitutivas especialmente desarrolladas para cada caso.

13.7. Condiciones de contorno

Consideremos dos medios cualitativamente diferentes que se encuentran en contacto. Supongamos que sus condiciones químicas no favorecen la mezcla, de modo que entre ellos puede identificarse una **frontera**. ¿Qué es la frontera? Esto suele prestarse a confusiones, ya que una respuesta rápida sugiere la idea de superficie. Sin embargo, la cuestión es más complicada. Lo que en general ocurre es que existe una región de transición entre los medios, en la que las propiedades varían de manera “físicamente posible". Esta región suele ser de dimensiones transversales muy pequeñas, pero da lugar a un importante capítulo de la física que estudia los llamados **efectos de superficies**. Cuando el estudio detallado de tales efectos no es relevante, es posible **modelar** el sistema ignorando la región de transición. En estas condiciones (en el mundo de los modelos), las fronteras son superficies matemáticas. Sobre estas superficies, las propiedades físicas de los medios son artificialmente discontinuas. ¿Por qué arti-

ficialmente? Pues porque la discontinuidad surge de “aplastar" la región de transición. Esta región tiene un volumen en la realidad, que en el modelo pasa a ser nulo. Analicemos algunas consecuencias concretas en relación con fenómenos eléctricos y magnéticos. Supongamos que en la región de transición reside carga no compensada y hay corrientes circulando. La descripción real debiera hacerse mediante densidades de carga $\delta(\vec{r})$ y de corriente $\vec{J}(\vec{r})$, ambas continuas en la región. Cuando el volumen va a cero (ya en el modelo), ambas densidades se desnaturalizan tendiendo a infinito. Entonces surgen artificialmente densidades superficiales de carga $\sigma(\vec{r}_s, t)$ y de corriente $\kappa(\vec{r}_s, t)$, con valores solo definidos en los puntos $\vec{r}_s$ de la superficie límite.

Aquí podemos preguntarnos acerca de los cuidados que habrá que tener al modelar con campos eléctricos y de inducción magnética. La respuesta puede obtenerse de hacer cumplir las propiedades integrales de los campos, sobre curvas y superficies cerradas, estratégicamente situadas en torno de las fronteras. Preparamos aquí los dos contextos geométricos habituales para la aplicación de leyes de flujo y circulación en fronteras.

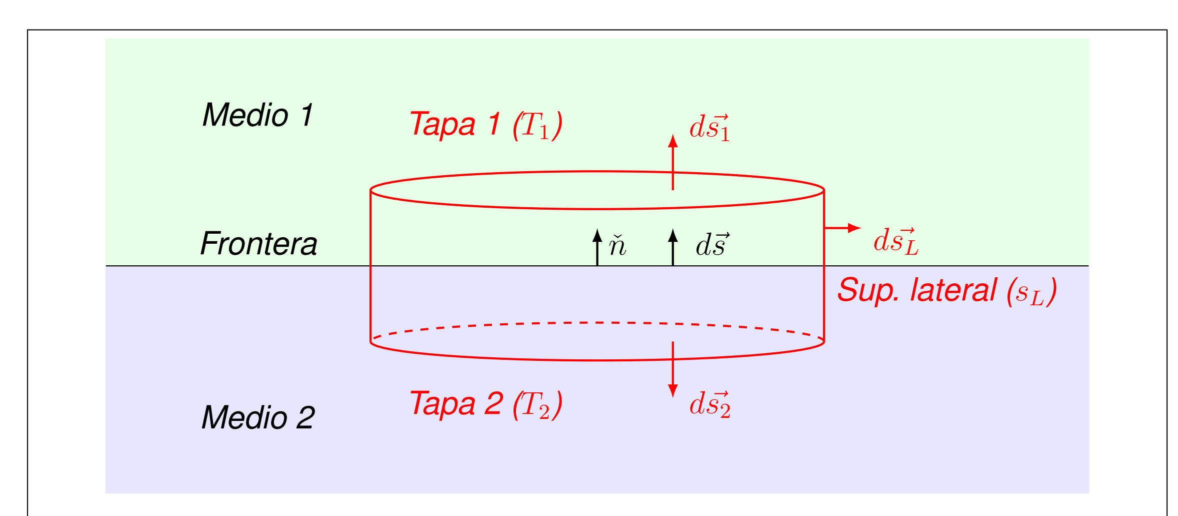


Figura 13.1: Escenario geométrico para deducir condiciones de contorno que requieren leyes de flujo. Aquí representamos la superficie S_A, indicando las partes que la componen, y los correspondientes vectores normales.

Aplicación de leyes de flujo: (como las de Gauss eléctrica o magnética), en este caso elegimos una superficie cerrada cilíndrica S_A, formada por dos tapas T_1 y T_2 y una superficie lateral S_L (ver Figura 13.1). Entonces

$$S_A \;=\; T_1 \; U \; T_2 \; U \; S_L \tag{13.28}$$

La superficie S_A se sitúa de modo que las tapas T_1 y T_2 queden una a cada lado de la frontera, en posiciones paralelas a la misma. La superficie lateral S_L será siempre muy pequeña, de modo que T_1 y T_2 estarán muy próximas a la "superficie-frontera", para la que reservamos la notación S. Como es de uso corriente, los vectores normales a S_A son salientes. Pero el sentido de los vectores normales a S debe elegirse. Nosotros adoptaremos la convención en que los vectores $\vec{ds}$ apuntan desde la superficie S hacia el medio 1. Con esta convención tenemos que

$$\vec{ds} \ = \ \vec{ds}_1 \ = \ -\vec{ds}_2 \tag{13.29}$$

donde $\vec{ds}_1$ y $\vec{ds}_2$ representan los vectores normales exteriores a las superficie T_1 y T_2 respectivamente. Por su parte, los vectores normales a la superficie lateral S_L son paralelos a S, pero carecen de importancia debido al pequeño tamaño de S_L.

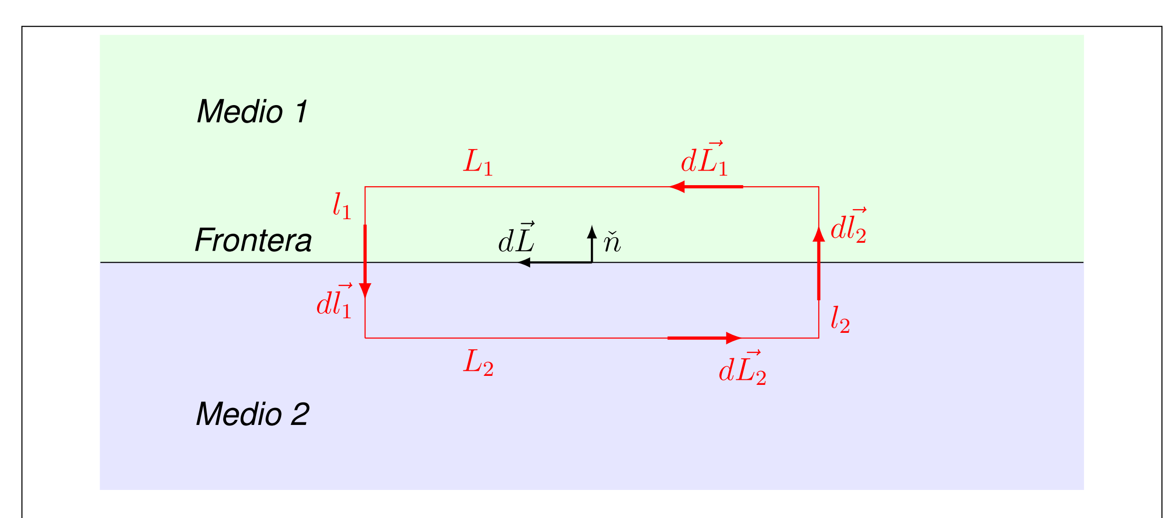


Figura 13.2: Escenario geométrico para deducir condiciones de contorno que requieren leyes de circulación. Aquí presentamos la curva cerrada C_A indicando las partes que la componen, y los correspondientes vectores tangentes.

Aplicación de leyes de circulación: (como la ley de Ampère), en este caso necesitamos una curva cerrada C_A, que elegimos con forma rectangular. A los lados largos del rectángulo los llamamos L_1 y L_2 , mientras que los lados cortos serán l_1 y l_2 (ver Figura 13.2). Entonces

$$C_A \ = \ L_1 \ U \ l_1 \ U \ L_2 \ U \ l_2 \tag{13.30}$$

La posición relativa de C_A será tal que los lados largos sean paralelos a la superficie S, uno a cada lado de la misma. Por su parte los lados cortos serán perpendiculares a S, y muy cortos, de modo que L_1 y L_2 sean extremadamente próximos a S. Sobre la curva C_A debe definirse el sentido de circulación de los vectores $\vec{dl}$, que serán tratados en cada caso según convenga.

13.8. Condiciones de contorno para los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$

Para determinar las condiciones que deben cumplir los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en el entorno de una superficie, aplicamos las consideraciones geométricas desarrolladas en la sección 13.7. Identificamos los medios en contacto por 1 y 2, y en homenaje a la simplicidad, suponemos que la superfice entre ellos es plana. El versor normal a la superficie $\breve{n}$, lo elegimos apuntando desde el medio 2 hacia el medio 1.

El vector $\vec{D}$ está relacionado con las cargas libres mediante una integral de flujo. Sobre la geometría propuesta tendremos

$$\oint_{S_A} \vec{D} \cdot \vec{ds}_A \; = \; Q_{(l)RS_A} \tag{13.31}$$

donde $Q_{(l)RS_A}$ representa la carga libre residente en el interior de la superficie cerrada S_A. Siguiendo los lineamientos de la sección 13.7, tenemos

$$\int_{T_1} \vec{D} \cdot \vec{ds}_1 \; + \; \int_{T_2} \vec{D} \cdot \vec{ds}_2 \; + \; \int_{S_L} \vec{D} \cdot \vec{ds}_L \; = \; Q_{(l)RS_A} \tag{13.32}$$

donde la integral sobre S_L puede despreciarse en virtud de su pequeñez. Si llamamos S al sector de la interfaz que se encuentra dentro de S_A es evidente que las superficies T_1 y T_2 “prácticamente" coinciden con S, por lo que sus vectores normales satisfacen que

$$\vec{ds}_1 \; = \; -\vec{ds}_2 \; = \; \vec{ds} \; = \; ds \, \breve{n} \tag{13.33}$$

Con esto tenemos que

$$\int_S \vec{D}_1 \cdot \vec{ds} \; - \; \int_S \vec{D}_2 \cdot \vec{ds} \; = \; \int_S \sigma_{(l)} \, ds \tag{13.34}$$

donde $\sigma_{(l)}$ es la densidad superficial de carga libre residente en S. El artificio que sigue puede resultar raro, una extraña manera de multiplicar por la unidad. Observe que

$$ds \;=\; ds\;(\breve{n}\cdot\breve{n}) \;=\; \breve{n}\cdot\vec{ds} \tag{13.35}$$

Con lo que reordenando tenemos

$$\int_S \left(\vec{D}_1 \;-\; \vec{D}_2 \;-\; \sigma_{(l)}\,\breve{n}\right)\cdot\vec{ds} \;=\; 0 \tag{13.36}$$

Como esto debe cumplirse para cualquier fragmentación de S, el integrando debe anularse. Esto es

$$\left(\vec{D}_1 \;-\; \vec{D}_2 \;-\; \sigma_{(l)}\,\breve{n}\right)\cdot\vec{ds} \;=\; 0 \tag{13.37}$$

De donde se obtiene que

$$\left(\vec{D}_1 \;-\; \vec{D}_2\right)\cdot\breve{n} \;=\; \sigma_{(l)}\,\breve{n}\cdot\breve{n} \tag{13.38}$$

O el resultado más compacto

$$\left(\vec{D}_1 \;-\; \vec{D}_2\right)\cdot\breve{n} \;=\; \sigma_{(l)} \tag{13.39}$$

Ahora tratamos la condición de contorno para el campo $\vec{E}$. Nuevamente seguimos los lineamientos de la sección 13.7, para el caso de integrales curvilíneas. El campo $\vec{E}$ (en electrostática) satisface que

$$\oint_{C_A} \vec{E}\cdot\vec{dl}_A \;=\; 0 \tag{13.40}$$

La integral puede separarse en los cuatro tramos que forman la curva C_A.

$$\int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{L}_1 \;+\; \int_{l_1} \vec{E}\cdot\vec{dl}_1 \;+\; \int_{L_2} \vec{E}\cdot d\vec{L}_2 \;+\; \int_{l_2} \vec{E}\cdot\vec{dl}_2 \;=\; 0 \tag{13.41}$$

Las integrales sobre los tramos l_1 y l_2 son despreciablemente pequeñas, en virtud de lo corto que resultan los segmentos de integración. Por otra parte, llamamos L al segmento contenido en la interfaz, que resulta de la intersección de la misma con la superficie plana limitada por C_A. A dicho segmento lo orientamos paralelamente a L_1, por lo que tenemos

$$d\vec{L}_1 \;=\; -d\vec{L}_2 \;=\; d\vec{L} \qquad d\vec{L}\cdot\breve{n} \;=\; 0 \tag{13.42}$$

Entonces

$$\int_L \vec{E}_1\cdot d\vec{l} \;-\; \int_L \vec{E}_2\cdot d\vec{l} \;=\; 0 \tag{13.43}$$

Agrupando bajo una única integral tenemos

$$\int_L \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\cdot d\vec{l} \;=\; 0 \tag{13.44}$$

Esta integral debe ser nula para cualquier curva C_A elegida sobre la superficie límite. Esto nos permite concluir que la relación debe cumplirse a nivel diferencial. Esto es

$$\left(\vec{E}_1 \;-\vec{E}_2\right)\cdot d\vec{L} \;=\; 0 \tag{13.45}$$

Esta expresión define la condición de contorno, aunque es conveniente escribirla en forma ligeramente distinta. Para ello, observe que el vector $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$ está obligado a ser perpendicular a la superficie, o sea paralelo a $\breve{n}$. Entonces resulta equivalente escribir la condición como

$$\left(\,\vec{E}_1 - \vec{E}_2\,\right)\times\breve{n} \;=\; 0 \tag{13.46}$$

13.9. Condiciones de contorno para los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$

Aquí procedemos nuevamente bajo los lineamientos de la sección 13.7. Una superficie plana constituye la frontera entre dos medios, a los que identificamos

por 1 y 2. Definimos el versor normal a la superficie $\breve{n}$ apuntando desde el medio 2 hacia el 1.

Comencemos por deducir una condición para el campo de inducción magnética $\vec{B}$. El mismo satisface la ley integral siguiente

$$\oint_{S_A} \vec{B} \cdot \vec{ds}_A \;=\; 0 \tag{13.47}$$

donde S_A tiene la forma definida en (13.28). Entonces la integral puede separarse en tres partes

$$\int_{T_1} \vec{B} \cdot \vec{ds}_1 \;+\; \int_{T_2} \vec{B} \cdot \vec{ds}_2 \;+\; \int_{S_L} \vec{B} \cdot \vec{ds}_L \;=\; 0 \tag{13.48}$$

La superficie lateral S_L es muy pequeña por lo que la integral sobre ella es despreciable. Por otra parte, las integrales sobre las tapas pueden referirse al sector S de la frontera

$$\int_S \vec{B}_1 \cdot \vec{ds} \;-\; \int_S \vec{B}_2 \cdot \vec{ds} \;=\; 0 \tag{13.49}$$

Agrupando bajo una misma integral tenemos

$$\int_S \left(\vec{B}_1 \;-\; \vec{B}_2\right) \cdot\, ds\, \breve{n} \;=\; 0 \tag{13.50}$$

Como el dominio de integración S puede elegirse arbitrariamente sobre la superficie, el integrando debe ser nulo. Entonces

$$\left(\, \vec{B}_1 - \vec{B}_2 \,\right) \cdot \breve{n} \;=\; 0 \tag{13.51}$$

Ahora abordamos la condición para el campo $\vec{H}$, en el escenario geométrico propuesto para integrales de circulación. Partimos de la ley de Ampère-Maxwell para medios materiales

$$\oint_{C_A} \vec{H} \cdot \vec{dl}_A \;=\; \int_{S'} \vec{J} \cdot \vec{ds}' \;+\; \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{D} \cdot \vec{ds}' \tag{13.52}$$

La integral curvilínea puede separarse en los cuatro tramos que componen la curva C_A. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{L}_1 \; + \; \int_{l_1} \vec{H} \cdot d\vec{l}_1 \; + \; \int_{L_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{L}_2 \; + \; \int_{l_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 \; = \\ = \int_{S'} \vec{J} \cdot \vec{ds}' \; + \; \frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{D} \cdot \vec{ds}' \end{aligned} \qquad (13.53)$$

Aquí hay que trabajar cuidadosamente con lo significativo que sea cada integral. En primer lugar, las integrales de línea sobre los tramos cortos, son despreciablemente pequeñas. Lo mismo podría argumentarse sobre las integrales de superficie, pero cabe una excepción. Si existiera una densidad de corriente superficial $\vec{\kappa}$ circulando sobre la interfaz, el flujo de $\vec{J}$ no se anularía por pequeña que sea la superficie de integración. Por el momento, veamos qué integrales sobreviven

$$\int_{L_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{L}_1 \; + \; \int_{L_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{L}_2 \; = \; \int_{S'} \vec{J} \cdot \vec{ds}' \qquad (13.54)$$

Ahora trabajemos sobre la integral de flujo. Comencemos por observar los siguientes detalles geométricos

$$\begin{aligned} d\vec{L}_1 \; &= \; -d\vec{L}_2 \; = \; d\vec{L} \\ \vec{dl}_1 \; &= \; -\vec{dl}_2 \; = \; \vec{dl} \; = \; dl \, \breve{n} \\ \vec{ds} \; &= \; d\vec{L} \times \vec{dl} \end{aligned} \qquad (13.55)$$

La densidad de corriente superficial $\vec{\kappa}$, puede escribirse en función de $\vec{J}$ como sigue

$$\vec{\kappa} \; = \; \int_{l_1} \vec{J} dl \qquad (13.56)$$

Escribamos la integral en un modo más detallado, y operemos vectorialmente

$$\begin{aligned}\int_S \vec{J}\cdot\vec{ds} &= \int_L\int_l \vec{J}\cdot\left(\vec{dL}\times\vec{dl}\right)\\ &= \int_L\int_l \vec{J}\,dl\,\cdot\left(\vec{dL}\times\breve{n}\right)\\ &= \int_L \vec{\kappa}\,\cdot\left(\vec{dL}\times\breve{n}\right)\\ &= \int_L \left(\breve{n}\times\vec{\kappa}\right)\cdot\vec{dL}\end{aligned} \tag{13.57}$$

Reemplazando en la relación (13.54), tenemos que

$$\int_L \vec{H}_1\cdot\vec{dL}\;-\;\int_L \vec{H}_2\cdot\vec{dL}\;=\;\int_L \left(\breve{n}\times\vec{\kappa}\right)\cdot\vec{dL} \tag{13.58}$$

Como todas las integrales están definidas en el mismo dominio, podemos agruparlas del siguiente modo

$$\int_L \left[\,\vec{H}_1-\vec{H}_2-\left(\breve{n}\times\vec{\kappa}\right)\right]\,\cdot\vec{dL}\;=\;0 \tag{13.59}$$

Aquí hay que reflexionar con cuidado. En general, cuando una integral definida sobre un dominio es nula, no implica que el integrando sea nulo. Pero si la integral es nula para “cualquier" dominio, entonces sí, el integrando es nulo. Este es el caso de la integral (13.59), por lo que concluimos que

$$\vec{H}_1-\vec{H}_2\;=\;\breve{n}\times\vec{\kappa} \tag{13.60}$$

Esta relación define la condición de contorno para el campo $\vec{H}(\vec{r},t)$. Sin embargo, conviene escribirla en una forma algo más compacta y operativa. Hagamos el producto vectorial de ambos miembros por el versor $\breve{n}$

$$\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)\times\breve{n}\;=\;\left(\,\breve{n}\times\vec{\kappa}\,\right)\times\breve{n} \tag{13.61}$$

Cierta identidad vectorial (surgida probablemente en sórdidos arrabales), ha sido bautizada como “identidad BACa menos CABallo". Dejamos a cargo del lector

interpretar el apodo. Lo cierto es que será útil aquí.

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) \;=\; \vec{B} \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) \;-\; \vec{C} \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right) \tag{13.62}$$

Veamos qué ocurre con el segundo miembro de (13.61) aplicándole la identidad anterior.

$$(\breve{n} \times \vec{\kappa}) \times \breve{n} \;=\; \breve{n} \times (\vec{\kappa} \times \breve{n}) \;=\; \vec{\kappa}\,(\breve{n} \cdot \breve{n}) \;-\; \breve{n}\,(\breve{n} \cdot \vec{\kappa}) \tag{13.63}$$

El primer producto escalar vale la unidad, mientras que el segundo es nulo, debido a que $\vec{\kappa}$ y $\breve{n}$ son siempre perpendiculares. Entonces el segundo miembro de (13.61) es simplemente $\vec{\kappa}$, y la condición de contorno toma la forma

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \times \breve{n} \;=\; \vec{\kappa} \tag{13.64}$$

13.10. Resumen e interpretación de las condiciones de contorno

He aquí el conjunto completo de condiciones de contorno dado por (13.39), (13.46), (13.51) y (13.64)

$$\begin{aligned}
\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2 \right) \cdot \breve{n} &= \sigma \\
\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \times \breve{n} &= 0 \\
\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) \cdot \breve{n} &= 0 \\
\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \times \breve{n} &= \vec{\kappa}
\end{aligned} \tag{13.65}$$

donde los subíndices 1 y 2 indican en qué medio están los vectores, y todos ellos están evaluados justo al lado de la superficie. Buscamos ahora una interpretación algo más coloquial para estas condiciones, basada en consideraciones geométricas respecto de la superficie. Comencemos por reconocer que cualquier vector $\vec{A}(\vec{r}_s)$ definido en puntos de la superficie, puede descomponerse en dos vectores: uno paralelo ($\vec{A}_{\parallel}$) y otro perpendicular ($\vec{A}_{\perp}$) a la misma. Entonces es inmediato

que

$$\vec{A}_{\parallel} \cdot \breve{n} \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad \vec{A}_{\perp} \times \breve{n} \;=\; 0 \tag{13.66}$$

Utilizando esta descomposición para los vectores involucrados en las condiciones de contorno, podemos eliminar productos superfluos. Así obtenemos el siguiente cuadro

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \left(\vec{D}_{1\perp} - \vec{D}_{2\perp} \right) \cdot \breve{n} \;&=\; \sigma \\
\text{(b)} \quad \left(\vec{E}_{1\parallel} - \vec{E}_{2\parallel} \right) \times \breve{n} \;&=\; 0 \\
\text{(c)} \quad \left(\vec{B}_{1\perp} - \vec{B}_{2\perp} \right) \cdot \breve{n} \;&=\; 0 \\
\text{(d)} \quad \left(\vec{H}_{1\parallel} - \vec{H}_{2\parallel} \right) \times \breve{n} \;&=\; \vec{\kappa}
\end{aligned} \tag{13.67}$$

Esta forma de escribir las condiciones de contorno nos permite leerlas de la siguiente manera:

(a) La discontinuidad en la componente normal del campo de desplazamiento $\vec{D}$ es igual a la densidad superficial de carga libre σ residente en la frontera. Si tal densidad es nula, dicha componente es continua.

(b) La componente tangencial del campo eléctrico $\vec{E}$ es continua.

(c) La componente normal del campo de inducción magnética $\vec{B}$ es continua.

(d) La discontinuidad en la componente tangencial del campo de excitación magnética $\vec{H}$ es igual a la densidad superficial de corriente de conducción $\vec{\kappa}$ que circula por la frontera. Si tal densidad es nula, dicha componente es continua.

Capítulo 14

Ondas electromagnéticas en medios transparentes

14.1. Ondas armónicas en medios transparentes

Ahora centremos nuestra atención en los medios materiales que admiten estar excentos de cargas libres y corrientes de conducción. De los medios con que estamos familiarizados hasta ahora, podríamos decir que solo los dieléctricos satisfacen esta condición. En tal caso, las ecuaciones de Maxwell toman las formas simplificadas siguientes:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{14.1}$$

Las ecuaciones constitutivas nos permiten reescribir las ecuaciones de Maxwell como relaciones entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Esto es

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0
\end{aligned} \tag{14.2}$$

Con las ecuaciones escritas en esta forma, y utilizando los mismos lineamientos que en el vacío, encontramos las siguientes ecuaciones diferenciales de onda

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 \vec{E} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
\vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{14.3}$$

Observemos que las expresiones obtenidas son muy parecidas a las que surgen del tratamiento en el vacío. La única diferencia está en el factor que acompaña a la derivada temporal, donde identificamos la rapidez de propagación como

$$v = \sqrt{\frac{1}{\epsilon\mu}} \tag{14.4}$$

Como ϵ y μ son propiedades dependientes del medio, surge que la rapidez de propagación es una característica del medio. En este punto, cabe enfatizar que, aunque las ecuaciones diferenciales de onda son muy similares al caso de vacío, las causas que devienen en tales ecuaciones son muy distintas. Es importante que el lector no pierda de vista la multiplicidad de procesos electromagnéticos microscópicos que ocurren en la intimidad de la materia, los cuales “no tienen" un análogo en el vacío. Más aún, la simplicidad de las ecuaciones diferenciales[1] tiene que ver principalmente con las fuertes hipótesis que pesan sobre las ecuaciones constitutivas. Esto es, que el medio sea de respuesta lineal, isótropo y

[1] Aquí corresponde pedirle disculpas al lector por el término “simplicidad", dado que una ecuación diferencial de segundo orden en derivadas parciales sobre tres coordenadas espaciales y el tiempo, nunca podrá calificarse de “simple". El término es utilizado como sinónimo de “compacto" o “elegantemente sobrio".

homogéneo. No obstante, lo que hace especialmente útil al presente tratamiento, radica en que existe una extensísima variedad de materiales y montajes en los que este modo de tratar la propagación de ondas coincide con la experimentación.

Volvamos a la rapidez de propagación dada por (14.4). Es muy práctico en aplicaciones ópticas la utilización de una propiedad del medio llamada **índice de refracción**. Se trata de una magnitud adimensional que denotaremos por n, a la que definimos como

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \tag{14.5}$$

Esta magnitud suele especificarse como una constante en medios ópticamente transparentes, cuando su aplicación requiere poco detalle (por ejemplo, lentes para correcciones visules). Otras tecnologías requieren mayores especificaciones sobre n. Por ejemplo, los espectrógrafos refractivos se diseñan teniendo en cuenta la dependencia del índice de refración n con la frecuencia de la luz. Nosotros centraremos nuestra atención en los casos en que n puede considerarse constante. En la mayoría de los casos, los materiales transparentes a la luz tienen susceptibilidad magnética μ muy próxima a la del vacío, por lo que cabe aproximar $\mu = \mu_0$. Por su parte, la permitividad eléctrica ϵ es siempre mayor que ϵ_0, por lo que el índice de refracción n es siempre mayor que la unidad.

14.2. Polarización lineal de ondas electromagnéticas

El concepto de polarización de ondas, es aplicable a las ondas transversales en general, y por tanto a las ondas electromagnéticas. Se dice que una onda plana está **linealmente polarizada** si sus vectores eléctricos, en toda posición y para todo tiempo, están orientados en una única dirección en el espacio (por supuesto, perpendicular a la dirección de propagación). En nuestros tratamientos elementales para encontrar soluciones de las ecuaciones diferenciales de onda, hemos propuesto soluciones linealmente polarizadas al elegir que el campo eléctrico $\vec{E}$ apunte en una dirección específica (por ejemplo, paralelo al eje x). Pero cabe preguntarnos, ¿existirá algo así en la Naturaleza? Digamos que, si bien el fenómeno es bastante frecuente, nuestros ojos no son capaces de detectarlo, por lo que en general pasará inadvertido.

La luz emitida por la inmensa mayoría de las fuentes naturales resulta no polarizada. Por esta razón suelen utilizarse los términos **luz natural** y **luz no po-**

larizada como sinónimos. Sin embargo, muchos procesos naturales que influyen sobre la luz en su recorrido entre la fuente y el detector, pueden dar lugar a su polarización total o parcial[2]. Por ejemplo, la luz que llega directamente del Sol no presenta polarización. Sin embargo, ciertas estrellas emiten luz parcialmente polarizada. Ahora bien, la misma luz del Sol, después de su interacción con la atmósfera terrestre, o después de reflejarse en la superficie de un lago, puede presentarse parcial o aún totalmente polarizada.

Por otra parte, la tecnología ha dado varios dispositivos que generan ondas polarizadas. Por ejemplo, muchas antenas de radio y micro-ondas, o algunas fuentes láser en el rango visible, generan ondas linealmente polarizadas. Existen numerosas técnicas de polarización de la luz natural. Nosotros discutiremos dos métodos. El primero consiste en el uso de láminas **polaroid**, que reciben el nombre de **polarizadores**. El segundo se desarrolla a partir de propiedades de la reflexión en interfaces dieléctrico-dieléctrico, y se conoce como **polarización por reflexión**.

14.3. Polarizadores

Consideremos un conjunto de alambres metálicos paralelos, equiespaciados y contenidos en un plano (una especie de parrilla de alambre). Supongamos ahora que una onda de radio incide sobre los alambres de modo que su dirección de propagación sea perpendicular al plano de los mismos. Los vectores de campo eléctrico de la onda, podrán descomponerse en direcciones paralela y perpendicular a los alambres. Las componentes paralelas darán lugar a corrientes en los conductores, que disiparán energía térmica, desarrollada a expensas de la energía del campo eléctrico de la onda. Por tanto, las componentes paralelas del campo se atenuarán. Por su parte, las componentes perpendiculares no movilizan cargas en los conductores, y por tanto pasan sin atenuarse. En conclusión, al otro lado del plano emerge una onda linealmente polarizada en la dirección perpendicular a la de los alambres.

El montaje que expusimos funciona bien cuando la distancia entre alambres es algo más pequeña que la longitud de onda de la onda incidente. Por ejemplo, para micro-ondas con $\lambda = 2,5$ cm podemos utilizar una rejilla de alambre cuya separación sea de 1 cm. El lector se preguntará ¿qué ocurre con la luz?, sabiendo que su longitud de onda es, por ejemplo $\lambda = 500$ nm$= 5 \times 10^{-7}$ m. Este número da por tierra con las esperanzas del más optimista...

[2]El concepto de polarización parcial se aplica a los casos en que la luz observada tiene sus vectores eléctricos en todas las direcciones, pero se observa una dirección particular en que dichas componentes son estadísticamente mayores, mientras que en otra están estadísticamente atenuadas.

Sin embargo, la tecnología pudo con este problema de escala[3]. La solución la aportaron las **láminas polaroid**, a las que podemos imaginar como una “miniatura" del montaje de alambres (ver Figura 14.1). Cadenas conductoras paralelas desarrolladas en la misma estructura molecular del material, constituyen la clave de los polarizadores de luz. Por supuesto que las cadenas conductoras no son visibles, por lo que no es factible deducir la dirección de polarización observándolas como en el caso de los alambres. En general, el fabricante de polarizadores suministra la información, indicando la dirección de transmisión. Si no fuera así, tal dirección puede determinarse experimentalmente.

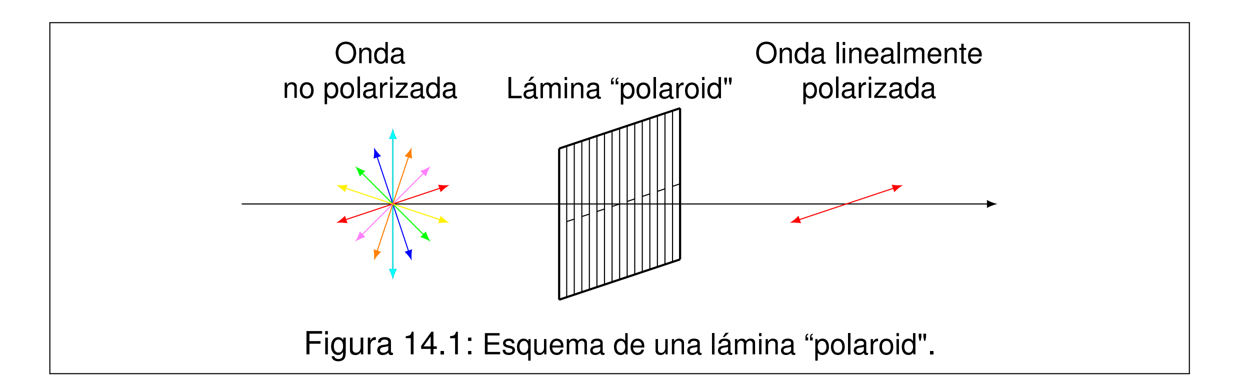


Figura 14.1: Esquema de una lámina “polaroid".

Cuando la luz natural pasa a través de un polarizador, el haz emergente surge linealmente polarizado con una intensidad que resulta la mitad de la original. Si la luz incidente es linealmente polarizada con intensidad I, la emergente también será lineamente polarizada con intensidad I'. La relación entre las intensidades la describe la **ley de Malus**, que expresa lo siguiente

$$I' \;=\; I\,\cos^2(\alpha) \tag{14.6}$$

donde α es el ángulo que forma la dirección de polarización de la luz incidente, con la de la luz emergente (que por supuesto, coincide con la dirección de transmisión del polarizador).

14.4. Reflexión y refracción

Los fenómenos de reflexión y refracción tienen lugar simultáneamente cuando una onda electromagnética incide sobre la superficie de separación (interfaz)

[3]Hoy no sorprendería que la nanotecnología resolviera esta cuestión. Sin embargo, conviene remarcar que esto fue resuelto hace varias (muchas) décadas.

entre dos medios dieléctricos transparentes. Para facilitar el análisis, supondremos que la interfaz es plana. Ahora consideremos que una onda armónica plana incide con dirección oblicua sobre la superficie. En adelante la llamaremos **onda incidente**. Luego, dos nuevas ondas planas emergen desde la interfaz, llamadas **reflejada** y **transmitida**[4]. El objetivo que nos trazamos consiste en determinar las características de las ondas reflejada y transmitida, a partir del conocimiento de la onda incidente y las propiedades de los medios involucrados.

Comencemos por construir un escenario geométrico adecuado. Supongamos que el origen de coordenadas está situado en un punto de la interfaz. Llamaremos **medio de incidencia** al que contenga la onda incidente y, al otro, **medio de transmisión**. Elegimos el eje z perpendicular a la interfaz, con su semieje positivo contenido en el medio de transmisión. Como las ondas electromagnéticas que involucraremos en este tratamiento no se propagan necesariamente en la dirección del eje z, es necesario extender las soluciones armónicas planas introducidas en la sección 12.8 para admitir una orientación arbitraria. Sea $\breve{u}$ un versor en la dirección de propagación de la onda. Definimos el **vector de onda** $\vec{k}$ mediante la relación:

$$\vec{k} = k\,\breve{u} \tag{14.7}$$

donde k es el número de onda introducido en la ecuación (12.39). Con esta definición, los campos eléctrico y magnético toman las formas siguientes

$$\begin{aligned} \vec{E}\,(\vec{r},t) \;&=\; \vec{E}_0 \,\sin\left(\,\vec{k}\cdot\vec{r}\,-\,\omega\,t\,\right) \\ \vec{B}\,(\vec{r},t) \;&=\; \vec{B}_0 \,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\,-\,\omega\,t\,\right) \end{aligned} \tag{14.8}$$

donde debe cumplirse que

$$\vec{E}_0\cdot\breve{u} = 0\,, \qquad \vec{B}_0\cdot\breve{u} = 0 \qquad \text{y} \qquad \vec{E}_0\cdot\vec{B}_0 = 0 \tag{14.9}$$

Supongamos ahora que $\vec{k}_I$ es el vector de onda que caracteriza la dirección de propagación de la onda incidente. Entre $\vec{k}_I$ y el eje z, queda determinado un plano, al que llamaremos **plano de incidencia**. En la Figura 14.2 presentamos el plano de incidencia que, como veremos más adelante, también contiene las direcciones de propagación de las ondas reflejada y transmitida. Elegimos el eje x en la intersección del plano de incidencia con la interfaz, orientando el sentido positivo hacia la derecha de la figura. Para que los ejes configuren una terna directa, elegimos el eje y perpendicular al plano de incidencia con orientación

[4]A la onda transmitida también se la llama **refractada**.

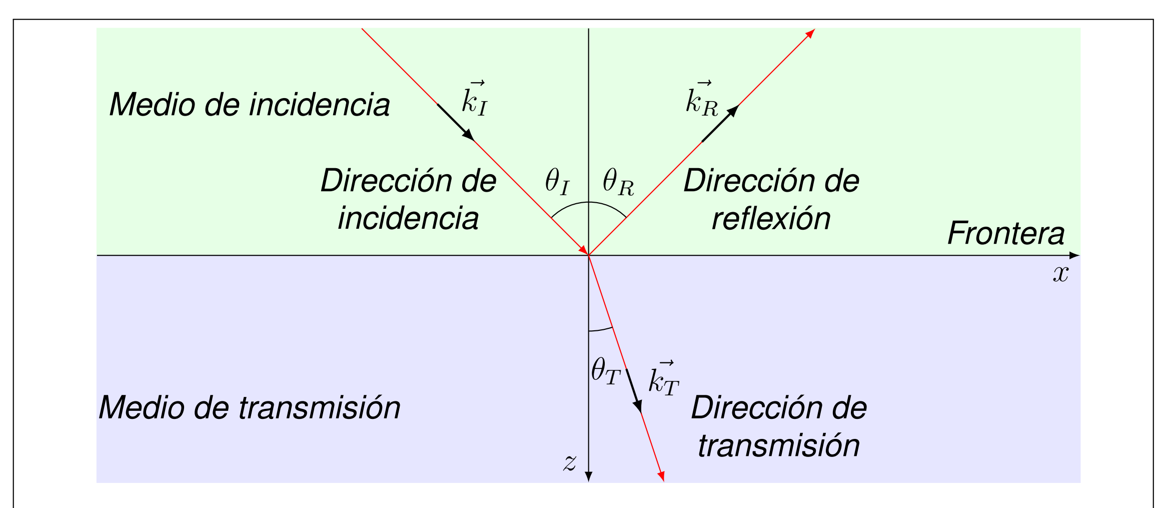


Figura 14.2: Esquema del plano de incidencia para una interfaz plana, indicando las direcciones de incidencia, reflexión y transmisión. También especificamos las notaciones de ángulos.

positiva saliente de la figura.

Ahora proponemos formas explícitas de onda armónica plana para cada onda involucrada en el análisis, utilizando los subíndices I, R o T según se trate de magnitudes asociadas a las ondas incidente, reflejada o transmitida. Como las ondas eléctrica y magnética son gemelas, trabajamos con la parte eléctrica, entendiendo que las conclusiones serán análogas para la parte magnética. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{E}_I(\vec{r},t) &= \vec{E}_{0I}\sin\left(\vec{k}_I\cdot\vec{r}-\omega_I t\right)\\
\vec{E}_R(\vec{r},t) &= \vec{E}_{0R}\sin\left(\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega_R t+\phi_R\right)\\
\vec{E}_T(\vec{r},t) &= \vec{E}_{0T}\sin\left(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega_T t+\phi_T\right)
\end{aligned} \quad (14.10)$$

donde los vectores $\vec{k}_I$, $\vec{k}_R$ y $\vec{k}_T$ tienen a priori las formas siguientes

$$\begin{aligned}
\vec{k}_I &= (\,k_{Ix},0,k_{Iz}\,)\\
\vec{k}_R &= (\,k_{Rx},k_{Ry},k_{Rz}\,)\\
\vec{k}_T &= (\,k_{Tx},k_{Ty},k_{Tz}\,)
\end{aligned} \quad (14.11)$$

Observe el lector que la componente k_{Iy} es nula, debido a la elección del sistema de coordenadas. Ahora veamos el aspecto que adquieren las funciones anteriores, cuando se las evalúa sobre la interfaz. Reservamos la notación $\vec{r}_s$ para indicar los puntos de la superficie, que tienen la forma

$$\vec{r}_s = (x, y, 0) \tag{14.12}$$

Evaluando en $\vec{r}_s$, tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{E}_I(\vec{r}_s, t) &= \vec{E}_{0I} \sin(k_{Ix} x - \omega_I t) \\
\vec{E}_R(\vec{r}_s, t) &= \vec{E}_{0R} \sin(k_{Rx} x + k_{Ry} y - \omega_R t + \phi_R) \\
\vec{E}_T(\vec{r}_s, t) &= \vec{E}_{0T} \sin(k_{Tx} x + k_{Ty} y - \omega_T t + \phi_T)
\end{aligned} \tag{14.13}$$

Ahora aplicamos la condición de contorno que debe cumplir el campo eléctrico sobre la interfaz. La misma consiste en la conservación de la componente paralela. Esto es, que las componentes x e y del campo eléctrico deben ser iguales a cada lado de la interfaz. Así tenemos

$$\begin{aligned}
E_{Ix}(\vec{r}_s, t) + E_{Rx}(\vec{r}_s, t) &= E_{Tx}(\vec{r}_s, t) \\
E_{Iy}(\vec{r}_s, t) + E_{Ry}(\vec{r}_s, t) &= E_{Ty}(\vec{r}_s, t)
\end{aligned} \tag{14.14}$$

Aquí nos encontramos con una nueva forma de igualdad. La igualdad entre funciones. El lector debe formarse una idea bien clara en cuanto a que las condiciones de contorno “no son ecuaciones". Las ecuaciones algebráicas relacionan constantes (conocidas o desconocidas). En cambio las igualdades entre funciones relacionan variables. En cierto modo, podemos decir que una relación entre funciones “contiene" infinitas ecuaciones, y las conclusiones que de ellas se derivan, deben ser válidas para todas estas ecuaciones.

Veamos ahora la forma explícita de las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}
&E_{0Ix} \sin(k_{Ix} x - \omega_I t) + E_{0Rx} \sin(k_{Rx} x + k_{Ry} y - \omega_R t + \phi_R) = \\
&\qquad = E_{0Tx} \sin(k_{Tx} x + k_{Ty} y - \omega_T t + \phi_T) \\
&E_{0Iy} \sin(k_{Ix} x - \omega_I t) + E_{0Ry} \sin(k_{Rx} x + k_{Ry} y - \omega_R t + \phi_R) = \\
&\qquad = E_{0Ty} \sin(k_{Tx} x + k_{Ty} y - \omega_T t + \phi_T)
\end{aligned} \tag{14.15}$$

En nuestro caso, las variables relacionadas son x, y y t, y decimos que la igualdad

debe cumplirse para todo x, para todo y y para todo t. La única posibilidad de que las condiciones se cumplan en estos dominios, es que todos los argumentos de las funciones seno sean iguales. Esto conduce a lo siguiente

$$\begin{array}{ccccc} k_{Ix} & = & k_{Rx} & = & k_{Tx} \\ k_{Ry} & = & k_{Ty} & = & 0 \\ \omega_I & = & \omega_R & = & \omega_T \end{array} \tag{14.16}$$

mientras que las fases relativas podrían ser

$$\phi_R = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad \text{y} \quad \phi_T = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \tag{14.17}$$

Observe el lector que cuando las fases ϕ_R y/o ϕ_T toman el valor π, los argumentos de los senos en que están incluidas pueden ser escritos con fases nulas cambiando el signo del término. Por ejemplo:

$$E_{0Rx} \sin\left(k_{Rx}x + k_{Ry}y - \omega_R t + \pi\right) = -E_{0Rx} \sin\left(k_{Rx}x + k_{Ry}y - \omega_R t\right) \tag{14.18}$$

Las condiciones (14.16) y (14.17) permiten muchas conclusiones valiosas, que trataremos con detalle a continuación. En primer lugar, reconozcamos que las funciones que describen las ondas admiten un formato más simple

$$\begin{array}{ccc} \vec{E}_I\left(\vec{r},t\right) & = & \vec{E}_{0I}\,\sin\left(\vec{k}_I\cdot\vec{r} - \omega\,t\right) \\ \vec{E}_R\left(\vec{r},t\right) & = & \vec{E}_{0R}\,\sin\left(\vec{k}_R\cdot\vec{r} - \omega\,t\right) \\ \vec{E}_T\left(\vec{r},t\right) & = & \vec{E}_{0T}\,\sin\left(\vec{k}_T\cdot\vec{r} - \omega\,t\right) \end{array} \tag{14.19}$$

donde se ha utilizado ω en forma genérica, para representar la frecuencia angular de todas las ondas. La omisión de las fases relativas ϕ_R y ϕ_T se ha hecho, concediendo que $\vec{E}_{0R}$ y $\vec{E}_{0T}$ pueden tener componentes de cualquier signo.

Observemos ahora que las componentes de $\vec{k}_R$ y $\vec{k}_T$ perpendiculares al plano de incidencia, son nulas. Esto conduce a que *las direcciones de reflexión y transmisión están contenidas en el plano de incidencia.*

Por otra parte, todas las frecuencias son iguales. Esto significa que *si una onda se refleja dentro de un medio o se transmite cambiando de medio, su frecuencia se conserva.* En adelante nos referiremos a la frecuencia simplemente

con ω, omitiendo subíndices.

De la relación entre las componentes x de los vectores de onda, se desprenden las llamadas **relaciones cinemáticas**, que nos permiten conocer los ángulos de reflexión θ_R y de transmisión θ_T, a partir del ángulo de incidencia θ_I (ver Figura 14.2). Así tenemos que los módulos de los vectores de onda se relacionan como sigue

$$k_I \sin\theta_I \;=\; k_R \sin\theta_R \;=\; k_T \sin\theta_T \tag{14.20}$$

Recordando que los módulos de los vectores de onda se relacionan con las propiedades del medio a través del índice de refracción, tenemos

$$\frac{n_I\omega}{c}\sin\theta_I \;=\; \frac{n_I\omega}{c}\sin\theta_R \;=\; \frac{n_T\omega}{c}\sin\theta_T \tag{14.21}$$

de donde se obtienen las relaciones cinemáticas buscadas

$$\theta_R \;=\; \theta_I \qquad\qquad n_T \sin\theta_T \;=\; n_I \sin\theta_I \tag{14.22}$$

A la primera de estas relaciones se la conoce como **ley de la reflexión**, y a la segunda, como **ley de Snell**. Ambas se conocieron empíricamente siglos antes del advenimiento de la teoría electromagnética de la luz. Luego veremos que pueden ser deducidas desde otro principio más antiguo, y que constituyen la base formal de la óptica geométrica.

14.5. Coeficientes de reflexión y transmisión

Para completar el análisis de la reflexión y la transmisión debemos desarrollar expresiones que nos conduzcan a conocer las proporciones en que la luz se refleja y se transmite. Este tratamiento requiere un uso más detallado de las condiciones de contorno, donde el objetivo es determinar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, y sus relaciones de fase con la onda incidente.

Para un análisis más prolijo, conviene trabajar con dos casos por separado. Estos son:

Modo transverso magnético: Es el caso en que los vectores magnéticos son perpendiculares al plano de incidencia, y los vectores eléctricos están contenidos en el mismo (Figura 14.3).

Modo transverso eléctrico: Es el caso en que los vectores eléctricos son perpendiculares al plano de incidencia, y los vectores magnéticos están contenidos en el mismo (Figura 14.4).

En general, la luz incidente en una interfaz, no se ajustará a ninguno de estos casos. Sin embargo, siempre es posible descomponer la onda incidente como suma de los dos modos. En las secciones siguientes desarrollaremos estos casos.

En ambos contextos, se definen los **coeficientes de reflexión** r y los **coeficientes de transmisión** t, distinguiéndolos con las indicaciones TM y TE. Sus definiciones en términos de los campos eléctricos son

$$\begin{aligned} r_{TM} &= \frac{E_{0R\parallel}}{E_{0I\parallel}} \qquad & r_{TE} &= \frac{E_{0R\perp}}{E_{0I\perp}} \\ t_{TM} &= \frac{E_{0T\parallel}}{E_{0I\parallel}} \qquad & t_{TE} &= \frac{E_{0T\perp}}{E_{0I\perp}} \end{aligned} \tag{14.23}$$

donde los símbolos $\parallel$ y $\perp$ se refieren a la orientación de las componentes eléctricas respecto del plano de incidencia. En los tratamientos que siguen, omitiremos las indicaciones TM y TE, y los símbolos $\parallel$ y $\perp$, para evitar la sobreabundancia notacional. No obstante, ninguno es superfluo, por tanto, los recuperaremos en el resumen de resultados.

En la sección anterior, hemos utilizado la condición de contorno según la cual, la componente tangencial del campo eléctrico es continua a través de la interfaz. Ahora trabajaremos más detalladamente, por lo que es conveniente repasar todas las condiciones, adaptándolas al escenario actual. Para ello observemos que en condiciones muy generales, la superficie de separación entre dos medios dieléctricos, no admite ni cargas libres ni corrientes de conducción. Entonces, las condiciones de contorno toman la forma

$$\begin{aligned} \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2 \right) \cdot \breve{n} &= 0 \\ \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) \times \breve{n} &= 0 \\ \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) \cdot \breve{n} &= 0 \\ \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) \times \breve{n} &= 0 \end{aligned} \tag{14.24}$$

donde los subíndices 1 y 2 responden a la notación del capítulo anterior. En los apartados siguientes las utilizaremos como punto de partida para los respectivos análisis.

14.6. Modo Transverso magnético (TM)

De la condición de contorno para el campo eléctrico $\vec{E}$, tenemos que

$$E_{0I}\,\cos(\theta_I) \;-\; E_{0R}\,\cos(\theta_I) \;=\; E_{0T}\,\cos(\theta_T) \tag{14.25}$$

Ahora incorporamos los coeficientes de reflexión y transmisión, omitiendo los subíndices identificatorios

$$r \;=\; \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \qquad \text{y} \qquad t \;=\; \frac{E_{0T}}{E_{0I}} \tag{14.26}$$

Reemplazando y operando tenemos

$$(1-r)\,\cos(\theta_I) \;=\; t\,\cos(\theta_T) \tag{14.27}$$

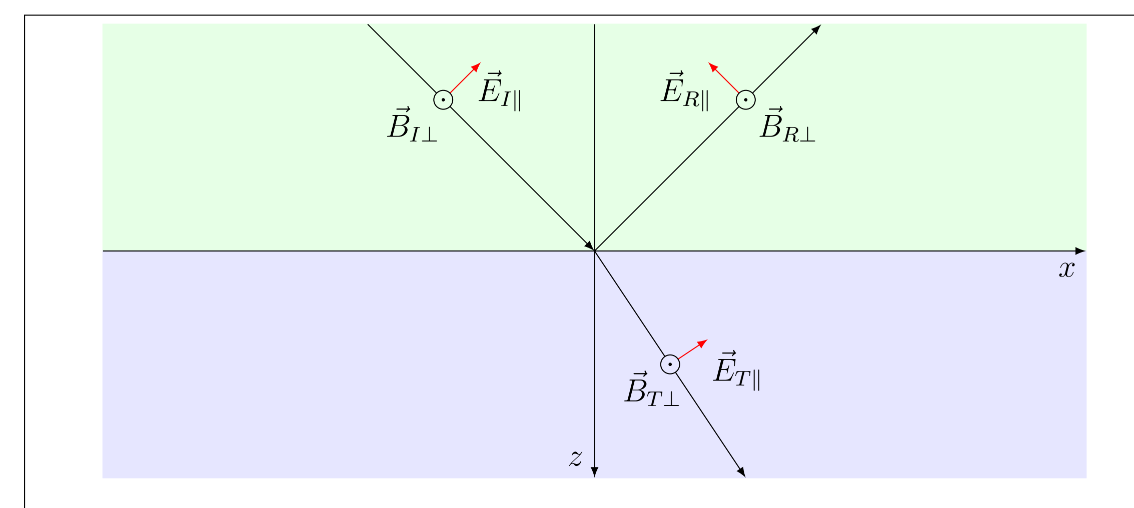


Figura 14.3: Esquema de los vectores eléctricos y magnéticos en el modo Transverso Magnético (TM).

Introducimos ahora la segunda condición de contorno relavante

$$H_{0I} \; + \; H_{0R} \; = \; H_{0T} \tag{14.28}$$

Reescribimos en términos de los campos de inducción magnética, y las propiedades magnéticas de los medios

$$\frac{B_{0I}}{\mu_I} \; + \; \frac{B_{0R}}{\mu_I} \; = \; \frac{B_{0T}}{\mu_T} \tag{14.29}$$

Recordando la relación de amplitudes entre los campos E_0 y B_0 en ondas planas armónicas, tenemos

$$\frac{E_{0I}}{\mu_I v_I} \; + \; \frac{E_{0R}}{\mu_I v_I} \; = \; \frac{E_{0T}}{\mu_T v_T} \tag{14.30}$$

de donde se obtiene que

$$\frac{1}{\mu_I v_I} \, (1 + r) \; = \; \frac{1}{\mu_T v_T} \, t \tag{14.31}$$

Introduciendo los índices de refracción, tenemos

$$\frac{n_I}{\mu_I} \, (1 + r) \; = \; \frac{n_T}{\mu_T} \, t \tag{14.32}$$

Entonces obtenemos otra relación entre t y r

$$t \; = \; \frac{n_I \mu_T}{n_T \mu_I} \, (1 + r) \tag{14.33}$$

Si ahora reemplazamos (14.33) en (14.27), obtenemos

$$(1 - r) \, \cos(\theta_I) \; = \; \frac{n_I \mu_T}{n_T \mu_I} \, (1 + r) \, \cos(\theta_T) \tag{14.34}$$

Buscamos una forma apropiada, con vistas a despejar r,

$$(1 - r) \, n_T \mu_I \, \cos(\theta_I) \; = \; (1 + r) \, n_I \mu_T \, \cos(\theta_T) \tag{14.35}$$

y finalmente tenemos

$$r = \frac{n_T \mu_I \cos(\theta_I) - n_I \mu_T \cos(\theta_T)}{n_T \mu_I \cos(\theta_I) + n_I \mu_T \cos(\theta_T)} \tag{14.36}$$

Ahora buscamos el coeficiente t. Para ello, reemplazamos el resultado (14.36) en (14.33). Así tenemos

$$t = \frac{n_I \mu_T}{n_T \mu_I} \left(1 + \frac{n_T \mu_I \cos(\theta_I) - n_I \mu_T \cos(\theta_T)}{n_T \mu_I \cos(\theta_I) + n_I \mu_T \cos(\theta_T)}\right) \tag{14.37}$$

Operando dentro del paréntesis tenemos

$$t = \frac{n_I \mu_T}{n_T \mu_I} \frac{2 n_T \mu_I \cos(\theta_I)}{n_T \mu_I \cos(\theta_I) + n_I \mu_T \cos(\theta_T)} \tag{14.38}$$

y finalmente obtenemos

$$t = \frac{2 n_I \mu_T \cos(\theta_I)}{n_T \mu_I \cos(\theta_I) + n_I \mu_T \cos(\theta_T)} \tag{14.39}$$

14.7. Modo Transverso eléctrico (TE)

De la condición de contorno para $\vec{H}$ tenemos que

$$-H_{0I} \cos(\theta_I) + H_{0R} \cos(\theta_I) = -H_{0T} \cos(\theta_T) \tag{14.40}$$

Reescribimos la condición en términos de la inducción magnética $\vec{B}$.

$$\frac{B_{0I}}{\mu_I} \cos(\theta_I) - \frac{B_{0R}}{\mu_I} \cos(\theta_I) = \frac{B_{0T}}{\mu_T} \cos(\theta_T) \tag{14.41}$$

y ahora utilizamos la relación de amplitudes entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ para ondas planas

$$\frac{E_{0I}}{\mu_I v_I} \cos(\theta_I) - \frac{E_{0R}}{\mu_I v_I} \cos(\theta_I) = \frac{E_{0T}}{\mu_T v_T} \cos(\theta_T) \tag{14.42}$$

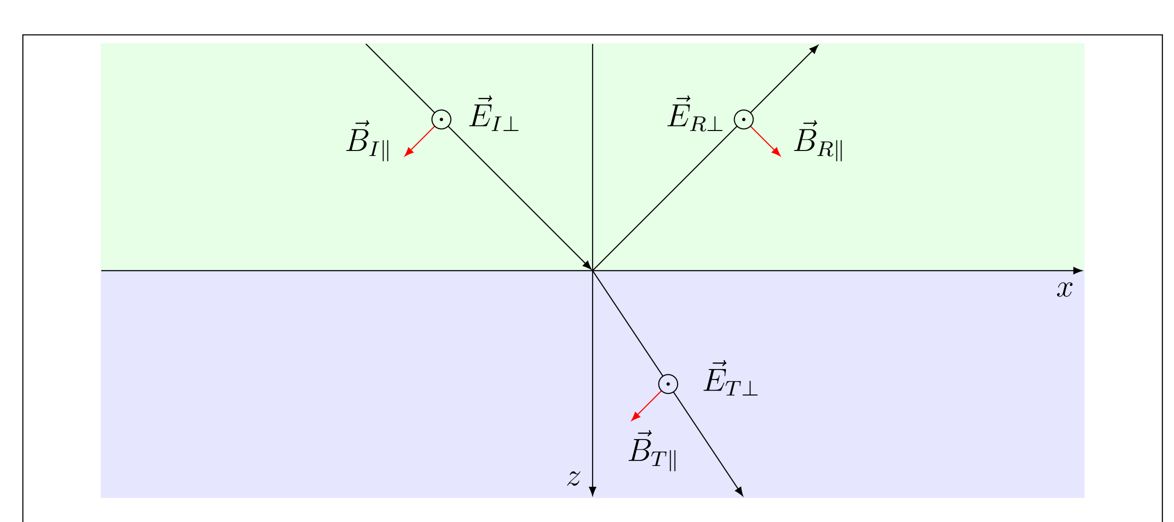


Figura 14.4: Esquema de los vectores eléctricos y magnéticos en el modo Transverso Eléctrico (TE).

Reordenando, tenemos

$$\frac{\cos(\theta_I)}{\mu_I v_I}\,(E_{0I} - E_{0R}) \;=\; \frac{\cos(\theta_T)}{\mu_T v_T}\,E_{0T} \tag{14.43}$$

Aquí introducimos los coeficientes de reflexión y transmisión r y t, y los índices de refracción de cada medio

$$\frac{n_I\,\cos(\theta_I)}{\mu_I}\,(1 - r) \;=\; \frac{n_T\,\cos(\theta_T)}{\mu_T}\,t \tag{14.44}$$

Ahora aplicamos la condición de contorno para el campo eléctrico $\vec{E}$

$$E_{0I} \;+\; E_{0R} \;=\; E_{0T} \tag{14.45}$$

En términos de los coeficientes de reflexión y transmisión tenemos

$$1 + r \;=\; t \tag{14.46}$$

Reemplazando (14.46) en (14.44), tenemos

$$\frac{n_I\,\cos(\theta_I)}{\mu_I}\,(1 - r) \;=\; \frac{n_T\,\cos(\theta_T)}{\mu_T}\,(1 + r) \tag{14.47}$$

Operando tenemos

$$\mu_T n_I \, \cos(\theta_I) \, (1 - r) \; = \; \mu_I n_T \, \cos(\theta_T) \, (1 + r) \tag{14.48}$$

de donde el coeficiente de reflexión r toma la forma

$$r \; = \; \frac{\mu_T n_I \, \cos(\theta_I) \; - \; \mu_I n_T \, \cos(\theta_T)}{\mu_T n_I \, \cos(\theta_I) \; + \; \mu_I v_T \, \cos(\theta_T)} \tag{14.49}$$

Luego, el coeficiente de transmisión se obtiene mediante (14.46)

$$t \; = \; \frac{2\mu_T n_I \, \cos(\theta_I)}{\mu_T n_I \, \cos(\theta_I) \; + \; \mu_I n_T \, \cos(\theta_T)} \tag{14.50}$$

14.8. Resumen con notaciones completas

Las relaciones (14.22) constituyen resultados generales conocidos como relaciones cinemáticas. Ellas son

$$\theta_R \; = \; \theta_I \qquad\qquad n_T \, \sin\theta_T \; = \; n_I \, \sin\theta_I \tag{14.51}$$

Los coeficientes de reflexión y transmisión en sus variantes TM y TE, vienen dados por las relaciones (14.36), (14.39), (14.49) y (14.50). Estos coeficientes también son conocidos como **relaciones de Fresnel**. Aquí simplemente las reescribimos con las notaciones completas propuestas en (14.23):

$$\begin{aligned} r_{TM} \; &= \; \frac{E_{0R\|}}{E_{0I\|}} \; = \; \frac{n_T\mu_I \, \cos(\theta_I) \; - \; n_I\mu_T \, \cos(\theta_T)}{n_T\mu_I \, \cos(\theta_I) \; + \; n_I\mu_T \, \cos(\theta_T)} \\ t_{TM} \; &= \; \frac{E_{0T\|}}{E_{0I\|}} \; = \; \frac{2n_I\mu_T \, \cos(\theta_I)}{n_T\mu_I \, \cos(\theta_I) \; + \; n_I\mu_T \, \cos(\theta_T)} \end{aligned} \tag{14.52}$$

$$
\begin{aligned}
r_{TE} &= \frac{E_{0R\perp}}{E_{0I\perp}} = \frac{n_I\mu_T \cos(\theta_I) - n_T\mu_I \cos(\theta_T)}{n_I\mu_T \cos(\theta_I) + n_T\mu_I \cos(\theta_T)} \\
t_{TE} &= \frac{E_{0T\perp}}{E_{0I\perp}} = \frac{2n_I\mu_T \cos(\theta_I)}{n_I\mu_T \cos(\theta_I) + n_T\mu_I \cos(\theta_T)}
\end{aligned}
\tag{14.53}
$$

Estas expresiones son de carácter general, aún cuando hayan sido deducidas para superficies planas. En efecto, cualquier superficie regular puede considerarse localmente plana. Solo es cuestión de elegir una porción suficientemente pequeña. Sin embargo, hay una parte de nuestro análisis que no será válida en general. Esto es, cuando una onda plana incide sobre una superficie que no es plana, las ondas reflejada y transmitida no serán planas, signo que los frentes de onda tomarán formas geométricas dependientes de la forma de la interfaz. En el capítulo de Óptica Geométrica, trataremos algunos casos de interés en los que se observa la influencia geométrica de la superficie.

En los fenómenos ópticos, a menudo se da una condición que simplifica las relaciones de Fresnel. Suele ocurrir que los medios transparentes a la luz visible presentan una permeabilidad magnética muy próxima a la del vacío. Esto es

$$
\mu = \mu_0 \tag{14.54}
$$

Entonces, las relaciones de Fresnel toman la forma simplificada siguiente

$$
\begin{aligned}
r_{TM} &= \frac{E_{0R\|}}{E_{0I\|}} = \frac{n_T \cos(\theta_I) - n_I \cos(\theta_T)}{n_T \cos(\theta_I) + n_I \cos(\theta_T)} \\
t_{TM} &= \frac{E_{0T\|}}{E_{0I\|}} = \frac{2n_I \cos(\theta_I)}{n_T \cos(\theta_I) + n_I \cos(\theta_T)} \\
r_{TE} &= \frac{E_{0R\perp}}{E_{0I\perp}} = \frac{n_I \cos(\theta_I) - n_T \cos(\theta_T)}{n_I \cos(\theta_I) + n_T \cos(\theta_T)} \\
t_{TE} &= \frac{E_{0T\perp}}{E_{0I\perp}} = \frac{2n_I \cos\theta_I}{n_I \cos(\theta_I) + n_T \cos(\theta_T)}
\end{aligned}
\tag{14.55}
$$

Otro caso simplificado de gran interés, resulta cuando la onda incidente llega perpendicularmente a la interfaz. De acuerdo con las relaciones cinemáticas, las ondas reflejada y transmitida también son perpendiculares. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
r_{TM} &= \frac{E_{0R\parallel}}{E_{0I\parallel}} = \frac{n_T - n_I}{n_T + n_I} \\
t_{TM} &= \frac{E_{0T\parallel}}{E_{0I\parallel}} = \frac{2n_I}{n_T + n_I} \\
r_{TE} &= \frac{E_{0R\perp}}{E_{0I\perp}} = \frac{n_I - n_T}{n_I + n_T} \\
t_{TE} &= \frac{E_{0T\perp}}{E_{0I\perp}} = \frac{2n_I}{n_I + n_T}
\end{aligned} \tag{14.56}$$

El lector habrá notado que las segunda y cuarta expresiones son iguales, mientras que las primera y tercera solo difieren en un signo. Lo que ocurre es bastante evidente ya que, en el caso de incidencia normal, se desnaturaliza el “plano de incidencia". Por tanto pierde sentido la diferenciación entre “transverso eléctrico" y “transverso magnético". Cualquiera de los modos debe conducir al mismo resultado. Pero, ¿entonces qué pasa con el cambio de signo? Prácticamente nada. Solo que para ser consistente con la mirada TM, la onda reflejada requiere un defasaje en π respecto de la incidente. Esto ocurre naturalmente en la representación TE dando lugar a la diferencia de signo.

14.9. Polarización por reflexión

Un fenómeno interesante ocurre cuando el coeficiente de reflexión del modo transverso magnético se anula. Esto ocurre para un ángulo muy específico, conocido como **ángulo de polarización** o **ángulo de Brewster**, cuando el índice de refracción del medio de incidencia es menor que el del medio de transmisión. Supongamos que un haz de luz no polarizada incide sobre una interfaz entre dos medios transparentes con $n_I < n_T$. Cada vector eléctrico que llega a la superficie, siempre puede descomponerse en partes paralela y perpendicular al plano de incidencia. La componente paralela (que es la que toma parte en el modo transverso magnético), no se reflejará, debido a que r_{TM} es nulo. Entonces la onda reflejada solo tendrá componentes perpendiculares al plano de incidencia, por lo que resultará linealmente polarizada.

Ahora buscamos el valor del ángulo de Brewster. Habitualmente se denomina así al ángulo de incidencia en el que ocurre el fenómeno y se lo subindica con la letra B. Nosotros utilizaremos el subíndice B, tanto para el ángulo de incidencia como para el de transmisión, entendiendo que esto ayudará a la claridad del

análisis. Comencemos por suponer que los medios transparentes involucrados, tienen valores de μ muy próximos a μ_0. Entonces utilizamos el coeficiente r_{TM} de las relaciones (14.55). Anular el coeficiente significa anular su numerador. Además debe seguir valiendo la ley de Snell (14.51). Estas dos consideraciones, conducen al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} n_T \cos(\theta_{IB}) &= n_I \cos(\theta_{TB}) \\ n_I \sin(\theta_{IB}) &= n_T \sin(\theta_{TB}) \end{aligned} \tag{14.57}$$

Despejando las funciones trigonométricas relacionadas al ángulo θ_{TB}, y elevando al cuadrado ambos miembros en cada expresión, tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{n_T}{n_I}\right)^2 \cos^2(\theta_{IB}) &= \cos^2(\theta_{TB}) \\ \left(\frac{n_I}{n_T}\right)^2 \sin^2(\theta_{IB}) &= \sin^2(\theta_{TB}) \end{aligned} \tag{14.58}$$

Para eliminar la incógnita θ_{TB}, simplemente sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones

$$\left(\frac{n_T}{n_I}\right)^2 \cos^2(\theta_{IB}) + \left(\frac{n_I}{n_T}\right)^2 \sin^2(\theta_{IB}) = 1 \tag{14.59}$$

Ahora solo falta encontrar el valor de θ_{IB}. Para facilitar la cuenta introducimos la constante a dada por

$$a = \frac{n_T}{n_I} \tag{14.60}$$

y las identidades trigonométricas (no tan conocidas) siguientes

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \qquad \text{y} \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)} \tag{14.61}$$

Reemplazando en (14.59), tenemos

$$\frac{1}{a^2}\frac{\tan^2(\theta_{IB})}{1+\tan^2(\theta_{IB})} + a^2\frac{1}{1+\tan^2(\theta_{IB})} = 1 \tag{14.62}$$

Operamos para despejar la tangente del ángulo θ_{IB}

$$\tan^2(\theta_{IB}) \;+\; a^4 \;=\; a^2\,\left[1 + \tan^2(\theta_{IB})\right] \tag{14.63}$$

$$\tan^2(\theta_{IB})\,\left(1 - a^2\right) \;=\; a^2 \;-\; a^4 \tag{14.64}$$

con lo que finalmente obtenemos

$$\tan^2(\theta_{IB})\,\left(1 - a^2\right) \;=\; a^2\,\left(1 - a^2\right) \quad \rightarrow \quad \tan^2(\theta_{IB}) \;=\; a^2 \tag{14.65}$$

Recordando la definición de a dada por (14.60), obtenemos la expresión buscada para el ángulo de Brewster:

$$\tan(\theta_{IB}) \;=\; \frac{n_T}{n_I} \tag{14.66}$$

El ángulo de Brewster cumple con una curiosa propiedad geométrica. Esta es que los ángulos de incidencia y transmisión son complementarios. Para probarlo, combinemos una versión levemente modificada de la expresión (14.66) y la ley de Snell:

$$\begin{aligned} n_I\,\sin(\theta_{IB}) &= n_T\,\sin(\theta_{TB}) \\ n_I\,\tan(\theta_{IB}) &= n_T \end{aligned} \tag{14.67}$$

Haciendo el cociente miembro a miembro, obtenemos

$$\cos(\theta_{IB}) \;=\; \sin(\theta_{TB}) \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_{IB} \;+\; \theta_{TB} \;=\; \frac{\pi}{2} \tag{14.68}$$

Una consecuencia inmediata de esta propiedad, es que cuando luz no polarizada incide sobre la interfaz según el ángulo de Brewster, los rayos emergentes (reflejado y transmitido) son perpendiculares entre sí.

14.10. Problemas

1. Las caras de un prisma de reflexión total interna forman ángulos de 45°, 45° y 90° entre ellas. Suponga que el prisma es utilizado en un montaje en que la luz entra perpendicularmente por una de las caras menores. Calcule cuál es el índice de refracción mínimo del vidrio con que puede construirse el prisma para que el mismo pueda producir reflexión total interna, funcionando tanto en aire como sumergido en agua.

2. Una fuente luminosa yace en el fondo de un estanque de 5 m de profundidad. Un detector colocado también en el fondo del estanque, verifica una imagen intensa de la fuente reflejada internamente en la superficie del agua, por lo que cabe suponer que se trata de un caso de reflexión total. ¿Cuál será la mínima distancia admisible entre el detector y la fuente para que sea posible este efecto?

3. Considere un haz de luz natural cuyos rayos son paralelos, que incide oblicuamente sobre la interfaz entre dos medios transperentes. Suponga que el índice de refracción del medio de procedencia de la luz es menor que el del medio de transmisión. Pruebe que si el haz reflejado es linealmente polarizado, el mismo forma un ángulo recto con el haz transmitido.

4. Un observador que mira la luz del sol reflejada en la superficie de un estanque, verifica que la misma es linealmente polarizada.

   a) Determine el ángulo que forman los rayos del sol con la vertical del lugar.

   b) Determine el plano de polarización de la luz reflejada en relación con las referencias geométricas del problema.

5. Tres polarizadores alineados se interponen en el camino de un haz de luz natural. El primero y el tercero se mantienen fijos, con sus ejes de polarización perpendiculares entre si, mientras que el segundo se hace girar.

   a) Deduzca una expresión para la intensidad luminosa relativa como función del ángulo del segundo polarizador, en la región comprendida entre el segundo y el tercer polarizador.

   b) Repita el análisis para la región posterior al tercer polarizador.

   c) Grafique las funciones obtenidas en los incisos anteriores.

Capítulo 15
Óptica geométrica

15.1. Introducción

Una de las descripciones más antiguas acerca de la forma en que se propaga la luz, consiste en suponer que la misma viaja a lo largo de líneas rectas que nacen en la fuente luminosa. Tal vez esta forma de pensar haya dado origen al concepto de “rayo luminoso”. Un rayo luminoso viaja desde la fuente a través del medio transparente que la rodea, hasta que se encuentra con un “obstáculo”. Si la superficie del obstáculo es opaca, el recorrido termina. En cambio, si la supeficie es un espejo bien pulido o un vidrio transparente bien pulido, el rayo cambiará de rumbo siguiendo leyes geométricas muy precisas. También es sabido que la luz no sigue reglas geométricas cuando se abre paso por la niebla o se propaga en un medio turbio. Tampoco sigue este tipo de reglas cuando las superficies sobre las que incide son rugosas (metales o vidrios no pulidos).

Hoy conocemos mucho más acerca de la naturaleza de la luz. Esto nos permite construir un criterio para decidir cuándo podemos esperar un comportamiento geométrico en la propagación de la luz. Como se trata de una onda, una medida de longitud característica de su propagación es la longitud de onda λ, que para la luz visible está entre los 400 nm y 700 nm. Veamos qué pasa con la niebla. ¿Qué es la niebla? Microgotas de agua en suspensión, cuyos diámetros (aunque bastante variables) los podemos imaginar como de algunas longitudes de onda. Para fijar ideas, pensemos en luz de $\lambda = 500$ nm y una gota de agua de la niebla con un diámetro $D = 0,001$ mm. Pongamos todo en una misma unidad y hagamos el cociente

$$\frac{D}{\lambda} \;=\; \frac{0,001\,\text{mm}}{500\,\text{nm}} \;=\; \frac{10^{-6}\,\text{m}}{5\times 10^{-7}\,\text{m}} \;=\; 20 \qquad (15.1)$$

El resultado nos indica que el diámetro de la gota es solo 20 veces la longitud de onda de la luz. Algo similar podríamos hacer con la luz que incide sobre una superficie rugosa. También obtendríamos un número parecido al comparar el tamaño de los detalles microscópicos de la superficie con la longitud de onda.

Todo parece indicar que la luz abandona su comportamiento geométrico cuando los medios en que se propaga o las superficies sobre las que incide presentan "granulaciones" de tamaños comparables con la longitud de onda. Veremos más adelante que la luz también se desvía de su comportamiento geométrico cuando se encuentra con obstáculos con detalles microscópicos como filos, ranuras, orificios, etc. Entonces, por contraposición, podemos decir que la luz responde bien a normas geométricas siempre que los medios de propagación y los objetos involucrados no presenten detalles de tamaño comparable con la longitud de onda de la luz.

15.2. Rayos luminosos

Para dar algo más de precisión sobre el concepto de rayo luminoso, conviene vincularlo con la idea cinemática de "trayectoria". La asociación es más intuitiva que exacta, porque el concepto de trayectoria involucra una partícula, y aquí no tenemos más que campos electromagnéticos[1]. Sin embargo, la idea se puede utilizar, pensando de la siguiente manera. Supongamos que la luz proviene de una fuente luminosa e ilumina cierta superficie. Si tomamos un pequeño objeto opaco y lo interponemos en el camino de la luz, el mismo proyectará un punto de sombra en la superficie. Ahora imaginemos que el pequeño objeto se desplaza hacia la pared, con el cuidado de observar que el punto de sombra sea siempre el mismo. Una vez completado el recorrido entre la fuente y el punto de sombra, la trayectoria del pequeño objeto será el recorrido del rayo luminoso.

Si el lector hiciera el experimento propuesto (a riesgo de pensar que se embarca en una tontería), iluminando una pared con una linterna, se encontraría con el resultado poco sorpendente de comprobar que la luz traza una recta. Con esto podría verse impulsado a reemplazar la forma engorrosa de reconocer rayos como trayectorias, por algo más simple. Por ejemplo, que un rayo luminoso puede caracterizarse por el segmento que va de la fuente a un punto de la pared. En tal caso, incurriría en un error, porque, a veces, los rayos son curvos. Dos ejemplos muy diferentes dan cuenta de ello: los espejismos y las lentes gravitacionales. Ambos fenómenos (aunque por causas muy diferentes) incluyen el tránsito de

[1] En este punto es conveniente que el lector no se aferre demasiado a esta frase. Seguramente, en un futuro cercano (si es que no ha ocurrido ya), le serán develadas nuevas concepciones acerca de la luz que extienden el horizonte del concepto de "partícula".

la luz a través de regiones donde el índice de refracción varía con la posición, dando lugar a una inhomogeneidad del medio en el sentido electromagnético.

Con las salvedades discutidas, diremos que en medios isótropos y homogéneos los rayos luminosos son rectos. Por supuesto que las superficies de cambio de medio dan lugar a cambios de dirección, como ya hemos visto en los fenómenos de reflexión y transmisión. En tal sentido, el concepto de rayo se extiende a cada tramo del recorrido en cada medio homogéneo por el que pasa la luz.

15.3. El principio de Fermat

Según hemos visto, la luz (y las ondas electromagnéticas en general) pueden comprenderse a partir de las ecuaciones de Maxwell, y de las condiciones que deben cumplir los campos en las fronteras de los medios donde ocurre la propagación. Sin embargo, mucho antes de que la teoría electromagnética aclarara la naturaleza de la luz, se conocían ciertas peculiaridades de su conducta. Una de ellas se conoce como **principio de Fermat**, y su forma original puede sintetizarse como sigue:

Consideremos un rayo luminoso que pasa por dos puntos del espacio, en cuyo recorrido interactúa con diversos medios. Imaginemos ahora todas las curvas posibles que unen dichos puntos. Entonces la luz elegirá como camino la curva cuyo recorrido insuma el mínimo tiempo.

Hoy sabemos que este enunciado es aplicable a todas las ondas electromagnéticas, y que el concepto de tiempo mínimo debe extenderse al de **tiempos extremales**[2]. No trataremos aquí los detalles de este concepto, solo diremos que en ciertos casos podría ocurrir que la onda elija el camino de máximo tiempo.

El principio de Fermat es compatible con la idea de que la luz viaja en línea recta cuando su propagación ocurre en el vacío o en un medio isótropo y homogéneo. Pero hay que tener cuidado, porque a veces los medios (o incluso el vacío) pueden darnos sorpresas. Fenómenos tales como los espejismos o las lentes gravitacionales muestran rayos curvados debido a las condiciones físicas variables con que se encuentra la luz en su recorrido. Este tipo de ejemplos son los que hacen especialmente importante al principio de Fermat, por lo eficiente como herramienta para el abordaje matemático de estos problemas.

Observemos cómo se puede aplicar el principio de Fermat en algunos casos muy simples. Comencemos por derivar la ley de la reflexión en un espejo plano.

[2]La palabra “extremal” se usa específicamente en una rama de la matemática (bastante avanzada) que se denomina “análisis funcional”. El término suele hacerse extensivo a enunciados como el principio de Fermat, y se dice que el mismo es un “principio extremal”.

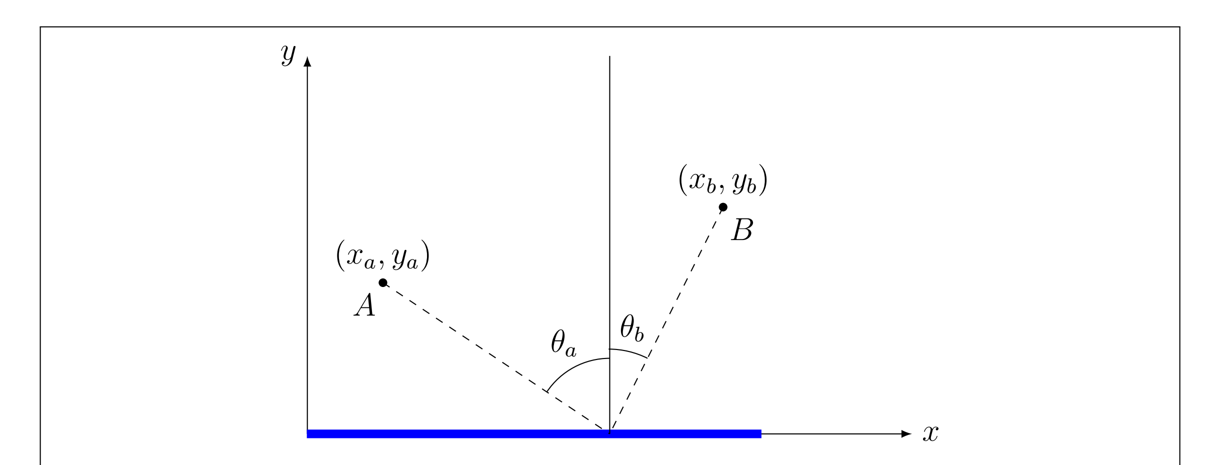


Figura 15.1: Montaje para el análisis de la reflexión especular utilizando el principio de Fermat. La trayectoria indicada representa una de las infinitas posibles a priori, caracterizada por el punto de contacto con el espejo en la posición x.

Consideremos los puntos A y B situados en posiciones respectivas (x_a, y_a) y (x_b, y_b). Una trayectoria genérica que vincule A con B, incluyendo una reflexión en el espejo, tendrá la forma que se muestra en la Figura 15.1. Nótese que los ángulos θ_a y θ_b se han dibujado deliberadamente distintos, suponiendo que no conocemos a priori su relación verdadera. El punto del espejo en el que ocurre la reflexión se indica con x, y el lector debe interpretar que existe una trayectoria diferente para cada valor de x. Ahora queremos saber el tiempo $T(x)$ que tardaría la luz en recorrer la trayectoria caracterizada por x. Como el recorrido ocurrirá íntegramente en el vacío, un destello luminoso viajará sobre la trayectoria siempre con rapidez c. Entonces tenemos

$$T(x) \;=\; \frac{1}{c}\sqrt{(x-x_a)^2+y_a^2} \;+\; \frac{1}{c}\sqrt{(x_b-x)^2+y_b^2} \tag{15.2}$$

Ahora nos preguntamos, ¿cuál de las trayectorias será la elegida por la luz? Aquí aplicamos el principio de Fermat. La trayectoria elegida será la de mínimo tiempo. Para encontrarla, derivamos (15.2) respecto del parámetro x que recorre toda la variedad de trayectorias considerada

$$\frac{dT}{dx} \;=\; \frac{x-x_a}{c\sqrt{(x-x_a)^2+y_a^2}} \;-\; \frac{x_b-x}{c\sqrt{(x_b-x)^2+y_b^2}} \tag{15.3}$$

Luego, el valor x_0 del parámetro x para el que se anula la derivada, define la trayectoria buscada. Esto es

$$\frac{x_0 - x_a}{c\sqrt{(x_0 - x_a)^2 + y_a^2}} \; - \; \frac{x_b - x_0}{c\sqrt{(x_b - x_0)^2 + y_b^2}} \; = \; 0 \tag{15.4}$$

Sean θ_I y θ_R a los ángulos de incidencia y reflexión, medidos desde la normal al espejo que pasa por x_0. Observando la geometría tenemos

$$\frac{1}{c}\sin(\theta_I) \; - \; \frac{1}{c}\sin(\theta_R) \; = \; 0 \tag{15.5}$$

o bien

$$\sin(\theta_R) \; = \; \sin(\theta_I) \implies \theta_R \; = \; \theta_I \tag{15.6}$$

Con lo que finalmente concluimos que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Esta es la llamada **ley de la reflexión**.

Así recuperamos la ley de la reflexión a partir de una idea alternativa, que no involucra la mirada electromagnética. Veremos ahora que un tratamiento análogo nos conduce a la ley de la refracción (ley de Snell). Para ello imaginemos que dos medios transparentes de distintas propiedades ópticas tienen una interfaz plana. Consideremos nuevamente que un rayo luminoso parte del punto A y llega al punto B, siendo que dichos puntos se encuentran en distintos medios que identificaremos como **medio de incidencia** y **medio de transmisión**, entendiendo que la rapidez con que la luz se propaga en cada uno de ellos es v_I y v_T respectivamente. Siguiendo los mismos lineamientos que en el análisis anterior, nos referimos a la familia de trayectorias posibles que unen los puntos A y B. Una de ellas se ilustra en la Figura 15.2, donde el parámetro x es nuevamente su identificación dentro del conjunto.

El tiempo de recorrido de la luz en la trayectoria será

$$T(x) \; = \; \frac{1}{v_i}\sqrt{(x - x_a)^2 + y_a^2} \; + \; \frac{1}{v_t}\sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2} \tag{15.7}$$

Aquí aplicamos el principio de Fermat, buscando el tiempo mínimo. Comenzamos por derivar (15.7):

$$\frac{dT}{dx} \; = \; \frac{x - x_a}{v_i\sqrt{(x - x_a)^2 + y_a^2}} \; - \; \frac{x_b - x}{v_t\sqrt{(x_b - x)^2 + y_b^2}} \tag{15.8}$$

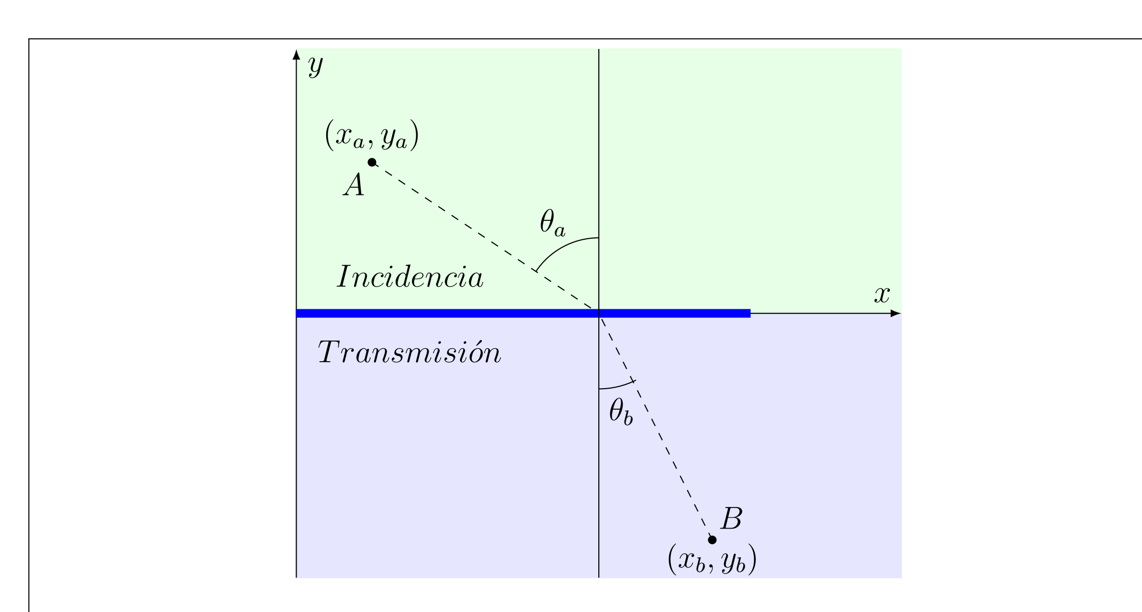


Figura 15.2: Esquema de una trayectoria perteneciente a la familia de curvas que unen los puntos A y B en el problema refractivo. El principio de Fermat selecciona la de tiempo mínimo.

Nuevamente, el valor x_0 del parámetro x para el que se anula la derivada, define la trayectoria buscada. Esto es

$$\frac{x_0 - x_a}{v_i\sqrt{(x_0 - x_a)^2 + y_a^2}} - \frac{x_b - x_0}{v_t\sqrt{(x_b - x_0)^2 + y_b^2}} = 0 \tag{15.9}$$

Llamando θ_I y θ_T a los ángulos de incidencia y transmisión, medidos desde la normal a la interfaz que pasa por x_0, y observando la geometría tenemos

$$\frac{1}{v_I}\sin(\theta_I) - \frac{1}{v_T}\sin(\theta_T) = 0 \tag{15.10}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{1}{v_I}\sin(\theta_I) = \frac{1}{v_T}\sin(\theta_T) \tag{15.11}$$

Esta es la **ley de Snell**, que multiplicada en ambos miembros por c toma la forma más usual en óptica

$$n_I \sin(\theta_I) = n_T \sin(\theta_T) \tag{15.12}$$

donde n_I y n_T son los índices de refracción de los medios de incidencia y transmisión respectivamente.

15.4. Sistemas ópticos elementales

La óptica geométrica constituye el soporte teórico de una tecnología extraordinariamente desarrollada. La complejidad de los sistemas ópticos actuales bien puede justificar una especialidad de la Ingeniería. Naturalmente que tales abordajes exceden ampliamente los alcances de este curso, por lo que nos limitaremos al estudio de unos pocos sistemas muy elementales, que ponen de manifiesto las cuestiones básicas. Los sistemas que trataremos son los espejos, las superficies dióptricas y las lentes delgadas, todos ellos constituidos por superficies esféricas. También podemos abordar combinaciones simples de estos sistemas.

Para tratar cualquiera de los sistemas mencionados es necesario incluir una serie de simplificaciones. En primer lugar supondremos que la luz se presenta siempre en forma de haces cónicos con un único punto de convergencia (ver sección 15.5). Además supondremos que siempre será posible identificar un **eje óptico** constituido por la recta que contiene todos los centros de curvatura de las superficies esféricas que forman el sistema. Naturalmente, este eje será único y el punto donde dicho eje corta cada superficie esférica se denomina **vértice de la superficie óptica** correspondiente. Una vez identificado el eje óptico diremos que cualquier rayo luminoso que sea interior a un cilindro de pequeño radio coaxial con el eje óptico, será un **rayo paraxial**. Una definición algo más precisa de esta categoría de rayos será presentada en la sección 15.6. Luego trataremos cada uno de los sistemas elementales en la aproximación paraxial: espejos esféricos (sección 15.7), superficies dióptricas esféricas (sección 15.8) y lentes delgadas (sección 15.9).

15.5. Puntos Objeto y Puntos Imagen

En sentido intuitivo, las palabras **objeto** e **imagen** tales como se las utiliza en óptica representan respectivamente el cuerpo de donde proviene la luz y el cuerpo imaginario de donde parece provenir la luz después de su interacción con un sistema óptico. Esta manera de identificar objetos e imágenes suele generar

confusiones, por lo que daremos aquí una interpretación con definiciones más rigurosas.

Comencemos por considerar una superficie cónica que subtiende un ángulo sólido pequeño, tal que podamos visualizar su vértice y su desarrollo a ambos lados del mismo. Consideremos ahora el conjunto de rectas (por supuesto, infinitamente largas), que pasan por el vértice de la superficie cónica y son interiores a la misma. Este conjunto constituye el soporte geométrico para introducir una terminología adecuada para el tratamiento de rayos luminosos. Si un conjunto de rayos luminosos puede superponerse exactamente sobre un tramo de las rectas contenidas en una superficie cónica, diremos que dicho conjunto constituye un **pincel de rayos**. Este pincel de rayos podrá contener o no al vértice del cono sobre el que se desarrolla. En cualquier caso, diremos que el vértice constituye el **punto de convergencia** del pincel de rayos. En tal sentido, un pincel de rayos siempre tendrá un punto de convergencia, que podrá resultar de la intersección de los rayos que lo componen, o de sus prolongaciones (ver Figura 15.3).

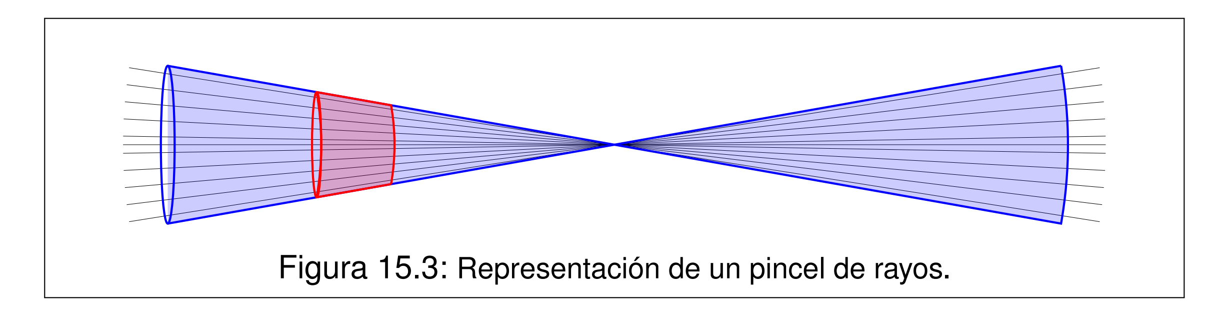


Figura 15.3: Representación de un pincel de rayos.

Aquí conviene discutir brevemente algunas limitaciones de esta forma de modelar la luz. En efecto, no siempre será factible encontrar conjuntos de rayos que puedan modelarse estrictamente como un pincel cónico. Entonces, la utilización de este modelo geométrico queda restringida al tratamiento de ciertos sistemas ópticos en los que la luz se comporte de esta manera, aunque más no sea en forma aproximada. En las secciones siguientes trataremos algunos sistemas ópticos elementales en la aproximación **paraxial**. En dicha aproximación, el modelo de pinceles de rayos resulta apropiado.

Entendemos por **sistema óptico simple**, en el contexto de este curso, a cualquiera de los tres elementos mencionados en la sección anterior (espejo esférico, superficie dióptrica esférica o lente delgada de caras esféricas). En relación con un sistema simple, siempre podremos identificar un pincel de rayos incidentes y un pincel de rayos emergentes. El primer pincel representa la luz que se aproxima al sistema antes de la interacción con el mismo, mientras que el segundo pincel representa la luz que se aleja del sistema después de la interacción. Ahora estamos en condiciones de introducir las siguientes definiciones en relación con un sistema óptico simple:

Punto objeto: punto de convergencia del pincel de rayos incidentes.

Punto imagen: punto de convergencia del pincel de rayos emergentes.

Tanto los puntos objeto como los puntos imagen admiten ser clasificados como **reales** o **virtuales**. Para desarrollar este concepto, el lector debe observar que un pincel de rayos incidente o emergente, siempre se encuentra en uno de los lados del sistema óptico simple.

Punto objeto real: si se encuentra del mismo lado del sistema óptico que el pincel de rayos incidente.

Punto imagen real: si se encuentra del mismo lado del sistema óptico que el pincel de rayos emergente.

Nótese que puntos objeto o imagen reales admiten que los rayos (incidentes o emergentes respectivamente) puedan tener una intersección real, o bien que se intersecten sus prolongaciones.

Punto objeto virtual: si se encuentra al otro lado del sistema óptico respecto de la localización del pincel de rayos incidentes.

Punto imagen virtual: si se encuentra al otro lado del sistema óptico respecto de la localización del pincel de rayos emergentes.

Obsérvese que los puntos objeto o imagen virtuales solo admiten ser la intersección de las prolongaciones de los rayos que constituyen los pinceles incidente o emergente.

15.6. Ejes ópticos y rayos paraxiales

Tal como hemos adelantado en la sección 15.4, restringiremos nuestro análisis al caso en que los sistemas ópticos tengan un único eje óptico. Sobre este eje estarán todos los centros de curvatura de las superficies que formen un eventual sistema óptico compuesto. Naturalmente, un sistema simple formado por una única superficie esférica tendrá un único centro de curvatura, por lo que el eje óptico podría ser cualquier recta que pase por dicho centro y corte a la superficie. Este es el caso de los espejos esféricos y las superficies dióptricas.

Ahora nos referiremos a los rayos paraxiales pensando en una única superficie óptica. Diremos que los rayos son **paraxiales** si forman un ángulo pequeño con el eje óptico, a la vez que inciden o emergen de la superficie en puntos cuya distancia al vértice es pequeña comparada con el radio de curvatura de

la superficie. Aquí hemos utilizado dos veces la palabra "pequeño", sin especificar cuantitativamente su significado. Cuán pequeños sean los ángulos o las distancias al vértice involucradados depende de la precisión que admitamos en la formación de imágenes del sistema óptico en cuestión. En nuestro caso desarrollaremos expresiones en la que **todos** los ángulos admitan ser aproximados como $\theta \cong \sin\theta \cong \tan\theta$.

La extensión del concepto de rayo paraxial a un sistema óptico compuesto por varias superficies con un único eje óptico es inmediata. En efecto, diremos que la conducta de la luz es paraxial si todos los rayos cumplen con la condición de paraxialidad en todas las superficies que componen el sistema. En tal sentido, las lentes delgadas constituyen un ejemplo de sistema con dos superficies ópticas en el que la paraxialidad debe tratarse de la manera indicada.

En los tratamientos que siguen supondremos que las estructuras de rayos tienen la misma simetría azimutal que los sistemas ópticos simples utilizados. Así es que consideraremos que los puntos objeto y los puntos imagen se encuentran siempre sobre el eje óptico[3]. Consistente con esta simetría, elegimos las coordenadas cilíndricas para los tratamientos matemáticos. Haremos coincidir el eje z con el eje óptico del sistema. Si se trata de superficies únicas, será conveniente elegir el origen de coordenadas en el vértice de la superficie. El sentido positivo del eje z será elegido del lado de la superficie en que se encuentra el pincel de rayos incidente (semiespacio de donde proviene la luz). La coordenada radial ρ describirá las separaciones del eje óptico y, debido a la simetría azimutal la coordenada ϕ no aparecerá explícitamente nunca.

Para tratamientos de sistemas compuestos, la técnica que utilizaremos en este curso consiste en redefinir el origen de coordenadas en cada paso. Analicemos el caso de un sistema formado por dos superficies ópticas, a las que nos referiremos como primera y segunda superficies según el orden en que la luz incide sobre ellas. Inicialmente trataremos las posiciones objeto e imagen referidas a la primera superficie. Luego desplazamos el origen de coordenadas al vértice de la segunda superficie. El punto imagen formado por la primera superficie será el punto objeto visto desde la segunda. Este punto debe ser resituado respecto del origen de la segunda superficie. Finalmente, el punto imagen de la segunda superficie será la posición imagen del sistema completo. La extensión a sistemas de cualquier número de superficies es inmediata.

La caracterización geométrica de una superficie queda totalmente determinada especificando la posición del centro de curvatura. Es bastante habitual que en tratamientos ópticos se le llame **radio de la superficie** a la posición de su

[3]El lector deberá comprender que esta manera de pensar es altamente simplificada, especialmente si imagina cualquier objeto físico real (no puntual). Sin embargo, es muy conveniente iniciar el análisis de esta manera para entender que entre punto objeto y punto imagen existe una relación unívoca derivable de una matemática sencilla.

centro de curvatura. La terminología es intuitivamente comprensible, aunque no formalmente correcta, ya que un radio (rigurosamente hablando) no podría ser negativo. No obstante, en homenaje a la tradición, aceptaremos la denominación **radio** como abreviatura de **posición del centro de curvatura**. Así tendremos **radios positivos** y **negativos** según el centro de curvatura se encuentre en los semiejes positivo o negativo del eje z.

Ahora nos referiremos a los conceptos de **cóncavo** y **convexo**. Para fijar ideas, observemos que una cuchara contiene una superficie cóncava y una superficie convexa. La superficie cóncava es la que sirve para levantar la sopa. Por oposición, la otra superficie es la convexa. En general, diremos que un sector de la superficie de un sólido es cóncavo si el centro de curvatura de dicho sector se encuentra hacia afuera de la superficie. Por contraposición, diremos que un sector de la superficie de un sólido es convexo si para alcanzar el centro de curvatura desde la superficie tenemos que internarnos en el sólido. Muchos sistemas ópticos presentan superficies que constituyen el límite entre un sólido y un fluido (aunque el fluido bien podría ser reemplazado por el vacío). Siempre referiremos a la superficie como cóncava o convexa observándola desde la perspectiva del sólido. El lector debe tener claro que una superficie cóncava no presenta un signo a priori determinado. Como ejemplo imaginemos una interfaz vidrio-aire cóncava. Si la luz proviene del aire, el radio de la superficie es positivo, mientras que si la luz proviene del vidrio el radio de la superficie es negativo.

15.7. Espejos esféricos

Consideremos un espejo esférico de radio R que, para fijar ideas, supondremos cóncavo ($R > 0$). Supongamos que el pincel de rayos incidentes presenta un punto objeto situado sobre el eje óptico a una distancia z del vértice, y que se desarrolla alrededor de dicho eje cumpliendo la condición de paraxialidad. Veremos que la última condición, conduce a que los rayos reflejados forman una imagen puntual sobre el eje, en una posición específica z'. Para ello, consideremos un rayo perteneciente al pincel incidente y su reflejado, que interactúan con el espejo en un punto de altura ρ, como indica la Figura 15.4. El esquema está intencionalmente desproporcionado, para poder indicar los ángulos y visualizar las relaciones entre ellos. También especificamos en el esquema la dirección “normal” al espejo en el punto de incidencia, que por supuesto, pasa por el centro de curvatura.

Nuestra estrategia consiste en probar que la posición z' no depende del punto del espejo en que ocurra la reflexión. Esto es, dado el radio R del espejo, la posición z' solo dependerá de z.

Comencemos por observar las siguientes relaciones angulares

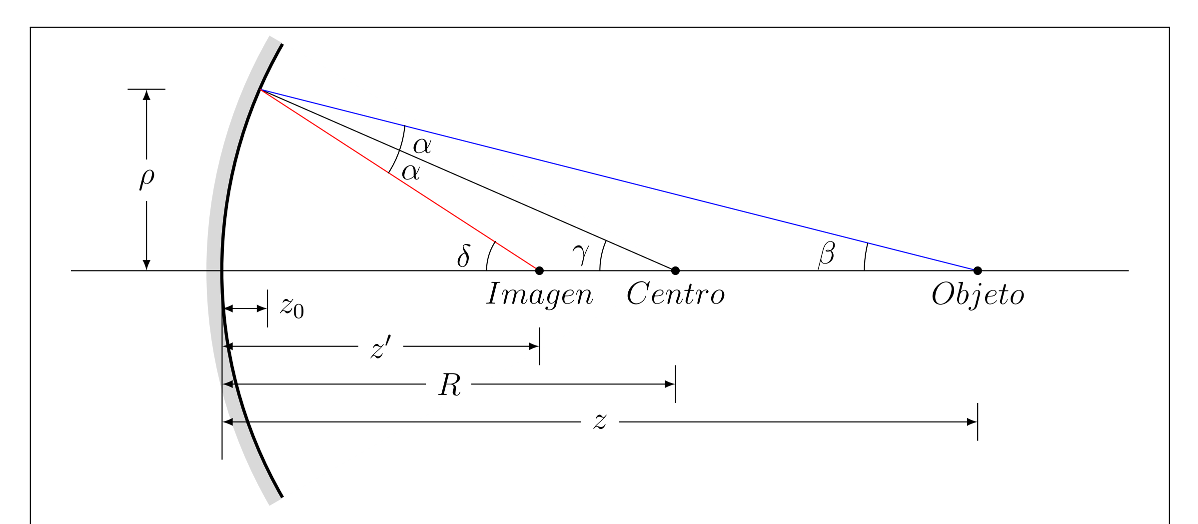


Figura 15.4: Elementos geométricos involucrados en la deducción de la relación entre posiciones objeto e imagen en un espejo esférico. El gráfico está hecho fuera de escala, exagerando los ángulos para facilitar la visualización de las relaciones. El lector no debe olvidar en este punto que los ángulos considerados en el modelo paraxial son muy pequeños.

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & \gamma \\ \alpha + \gamma & = & \delta \end{array} \qquad \rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & \gamma - \alpha \\ \delta & = & \gamma + \alpha \end{array} \right. \tag{15.13}$$

de donde surge que

$$\beta + \delta = 2\gamma \tag{15.14}$$

Observe el lector que en el dibujo se ha indicado la distancia z_0. La misma registra una diferencia en la coordenada z entre el punto donde ocurre la reflexión en el espejo y el vértice del mismo. Aquí es importante reflexionar acerca de qué tan grande es z_0. En efecto, lo que lo hace apreciable en el dibujo es el tamaño exagerado de los ángulos dibujados. Recordando que trabajamos en el límite paraxial es fácil convencerse de lo despreciablemente pequeño que resultará en la práctica el valor de z_0.

Teniendo en cuenta la observación anterior, y en virtud de la paraxialidad tendremos las siguientes relaciones

$$\beta \cong \tan(\beta) = \frac{\rho}{z} \qquad \gamma \cong \tan(\gamma) = \frac{\rho}{R} \qquad \delta \cong \tan(\delta) = \frac{\rho}{z'} \tag{15.15}$$

Reemplazando en la ecuación (15.14) tenemos:

$$\frac{\rho}{z} + \frac{\rho}{z'} = 2\,\frac{\rho}{R} \tag{15.16}$$

con lo que finalmente resulta

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = \frac{2}{R} \tag{15.17}$$

Esta expresión relaciona la posición del punto imagen con la del punto objeto para un espejo especificado. La misma ha sido deducida para un espejo cóncavo, pero el tratamiento es suficientemente general como para que resulte válida aún cuando los espejos sean convexos o planos ($R \rightarrow \infty$). Nótese que en la Figura 15.4 hemos utilizado valores positivos para las magnitudes R, z y z'. Sin embargo, todos ellos podrían admitir valores negativos.

15.8. Superficies dióptricas esféricas

Una **superficie dióptrica** es una interfaz entre dos medios transparentes, cuya terminación superficial es suficientemente lisa como para admitir tratamientos ópticos geométricos. Consideremos una superficie dióptrica esférica que, teniendo en cuenta el medio de procedencia de la luz, supondremos con radio de curvatura positivo. Además supongamos que n y n' representan los índices de refracción de los medios de incidencia y transmisión respectivamente. Para fijar ideas, elegimos $n' > n$, consistentemente con la Figura 15.5. El tratamiento geométrico que sigue es análogo al que desarrolláramos para espejos esféricos.

Las relaciones angulares se construyen muy fácilmente, teniendo cuidado en observar que los ángulos α y α' se miden respecto de la normal (identificable como la recta que se inicia en el centro de curvatura). El primero para el rayo incidente y el segundo para el transmitido. Las relaciones son

$$\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & \gamma \\ \alpha' + \delta & = & \gamma \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & -\beta + \gamma \\ \alpha' & = & \gamma - \delta \end{array} \right. \tag{15.18}$$

Observemos que la ley de Snell y la condición de paraxialidad (ángulos pequeños) nos permiten la siguiente aproximación

$$n \sin\alpha = n' \sin\alpha' \qquad \Longrightarrow \qquad n\alpha \cong n'\alpha' \tag{15.19}$$

Retomemos las ecuaciones (15.18) y multipliquemos la primera por n y la segun-

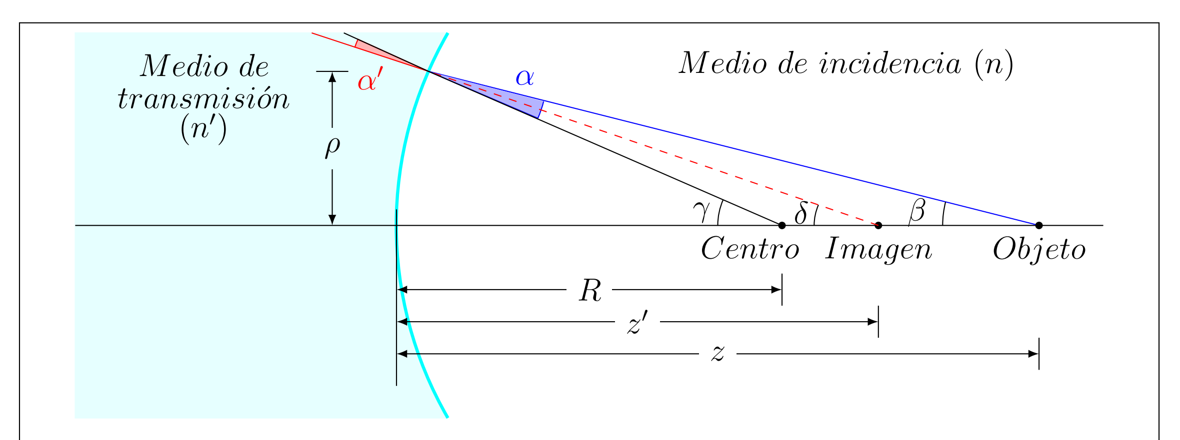


Figura 15.5: Esquema de los elementos geométricos involucrados en la deducción de la relación de posiciones objeto e imagen, en una superficie dióptrica esférica. Note que el dibujo está desproporcionado para visualizar las relaciones angulares. Los ángulos α y α' son los que forman los rayos incidente y refractado con la normal respectivamente. Observe que la normal no se ve perpendicular a la superficie debido a la desproporción del esquema.

da por n'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} n\alpha &=& -n\beta + n\gamma \\ n'\alpha' &=& n'\gamma - n'\delta \end{array} \right. \tag{15.20}$$

En virtud de la forma simplificada (15.19), restando miembro a miembro las ecuaciones (15.20) y reacomodando obtenemos:

$$n\beta - n'\delta = (n - n')\gamma \tag{15.21}$$

Ahora procedemos en forma completamente análoga al caso de espejos esféricos en relación a los tratamientos angulares:

$$\beta \cong \tan(\beta) = \frac{\rho}{z} \qquad \gamma \cong \tan(\gamma) = \frac{\rho}{R} \qquad \delta \cong \tan(\delta) = \frac{\rho}{z'} \tag{15.22}$$

Finalmente reemplazamos en (15.21)

$$n\frac{\rho}{z} - n'\frac{\rho}{z'} = (n - n')\frac{\rho}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{n}{z} - \frac{n'}{z'} = \frac{(n - n')}{R} \tag{15.23}$$

Esta expresión es válida para superficies cóncavas o convexas, y para cualquier relación de índices de refracción.

Las superficies planas pueden tratarse como un caso especial de (15.16),

cuando el radio de curvatura R tiende a infinito. En este caso tenemos

$$\frac{n}{z} - \frac{n'}{z'} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad z' = \frac{n'}{n} z \tag{15.24}$$

Como aplicación de esta expresión, podemos citar la profundidad aparente de objetos sumergidos en agua. Suponiendo que la luz inicia su marcha en el objeto sumergido, para luego emerger hacia el observador que mira desde el aire justo arriba, tenemos que $n = 1,33$ (agua) y $n' = 1$ (aire). Entonces, resulta que la posición de la imagen está más cerca de la superficie que el objeto. Por tanto la profundidad aparente es menor que la real (ver Figura 15.6).

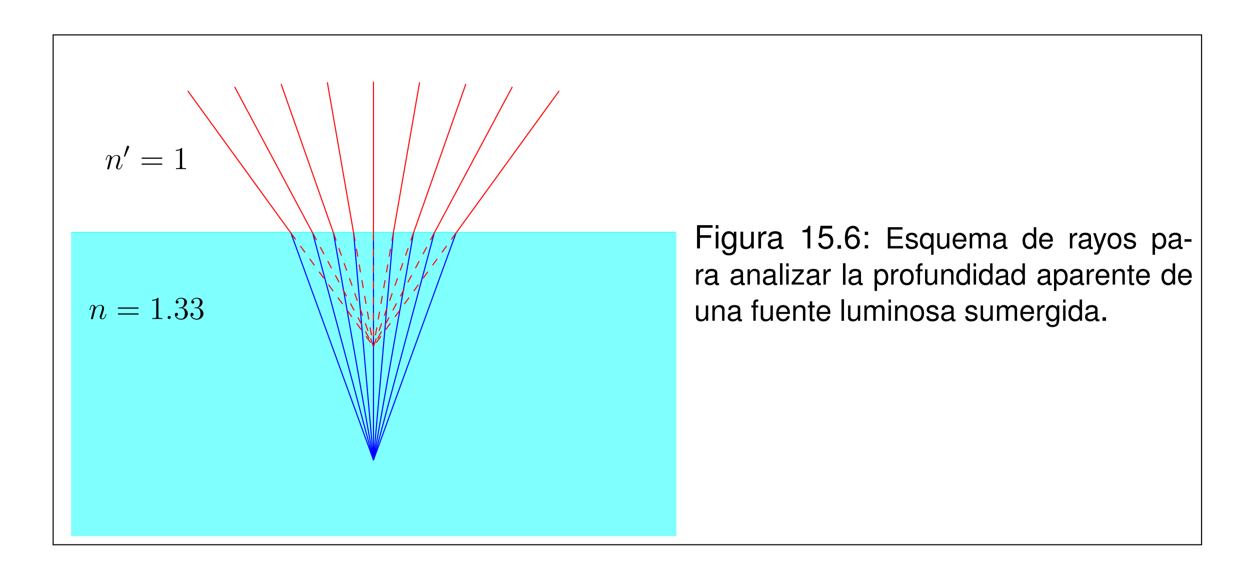


Figura 15.6: Esquema de rayos para analizar la profundidad aparente de una fuente luminosa sumergida.

15.9. Lentes delgadas

Una **lente**, en la aproximación en la que venimos trabajando, será una sucesión de dos superficies dióptricas esféricas S_a y S_b de radios R_a y R_b respectivamente, cuyos centros de curvatura se encuentran sobre un mismo eje óptico (único). Diremos que la lente es **delgada** si la distancia entre los vértices de las dos superficies que la componen es despreciablemente pequeña en comparación con los radios de las mismas. En el caso más general, tendremos tres medios involucrados cuyos índices de refracción denotaremos con n_1, n_2 y n_3 según el orden en que la luz los atraviesa. En cada medio tendremos un pincel de rayos cuyos puntos de convergencia respectivos estarán localizados en las posi-

ciones z_1, z_2 y z_3[4]. Entonces, las relaciones entre las posiciones objeto e imagen en cada superficie deben satisfacer la relación (15.23). Así tenemos

$$\frac{n_1}{z_1} - \frac{n_2}{z_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_a} \tag{15.25}$$
$$\frac{n_2}{z_2} - \frac{n_3}{z_3} = \frac{n_2 - n_3}{R_b} \tag{15.26}$$

Combinando estas últimas expresiones podemos eliminar la posición z_2. En tal sentido, diremos que el punto objeto de la lente delgada se encuentra en la posición z_1 mientras que el punto imagen estará en la posición z_3. La relación entre z_1 y z_3 será

$$\frac{n_1}{z_1} - \frac{n_3}{z_3} = \frac{n_1 - n_2}{R_a} + \frac{n_2 - n_3}{R_b} \tag{15.27}$$

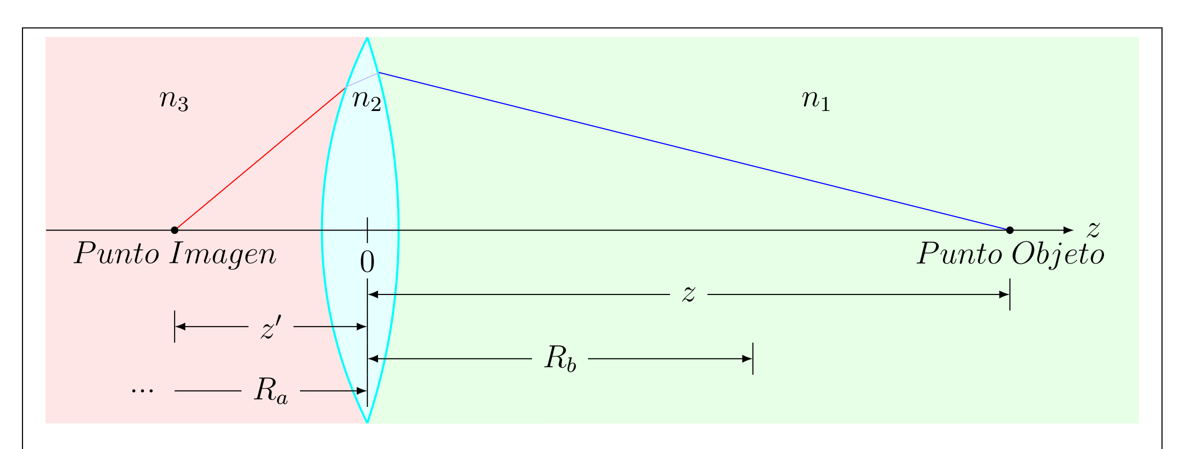


Figura 15.7: Elementos geométricos involucrados en la deducción de la relación entre posiciones *objeto* e *imagen* en una lente.

Lo habitual es que las lentes delgadas estén construidas con un material de índice de refracción n, mientras que su entorno es el aire (índice de refracción unidad). Esto es $n_1 = n_3 = 1$ y $n_2 = n$. Por otra parte, para estar en línea con las notaciones habituales, denotaremos por z a la posición objeto del sistema y z' a la correspondiente posición imagen (ver Figura 15.7). Entonces tenemos $z = z_1$ y $z' = z_3$, con lo que la ecuación (15.27) se convierte en

[4]Aquí resulta conveniente que el lector observe que z_1 es la posición del punto objeto asociado a la superficie S_a, z_2 es simultáneamente la posición del punto imagen de S_a y del punto objeto de S_b, mientras que z_3 es la posición imagen de S_b.

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z'} = \frac{1-n}{R_a} + \frac{n-1}{R_b} \tag{15.28}$$

que en forma más compacta resulta

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a}\right) \tag{15.29}$$

Esta última expresión vincula las posiciones objeto e imagen con las propiedades constructivas de la lente, con la restricción de estar inmersa en aire (o vacío).

15.10. Puntos focales

Los **puntos focales** asociados a un sistema óptico se definen del siguiente modo:

Punto focal objeto F_o: punto objeto asociado a un sistema óptico simple para el cual el punto imagen está infinitamente alejado del vértice. Su posición sobre el eje z se denota por f_o.

Punto focal imagen F_i: punto imagen que se forma a partir de un pincel de rayos incidentes cuyo punto objeto está infinitamente alejado del vértice. Su posición sobre el eje z la indicaremos con f_i.

Comencemos por analizar los puntos focales asociados a un espejo esférico. Para ello recurrimos a la ecuación (15.17). Teniendo en cuenta las definiciones anteriores obtenemos:

$$\frac{1}{f_o} = \frac{2}{R} \Longrightarrow f_o = \frac{R}{2} \tag{15.30}$$

$$\frac{1}{f_i} = \frac{2}{R} \Longrightarrow f_i = \frac{R}{2} \tag{15.31}$$

Entonces observamos que los puntos focales objeto e imagen de un espejo esférico coinciden. Una forma muy habitual de escribir la ecuación (15.17) es

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{f_o} \tag{15.32}$$

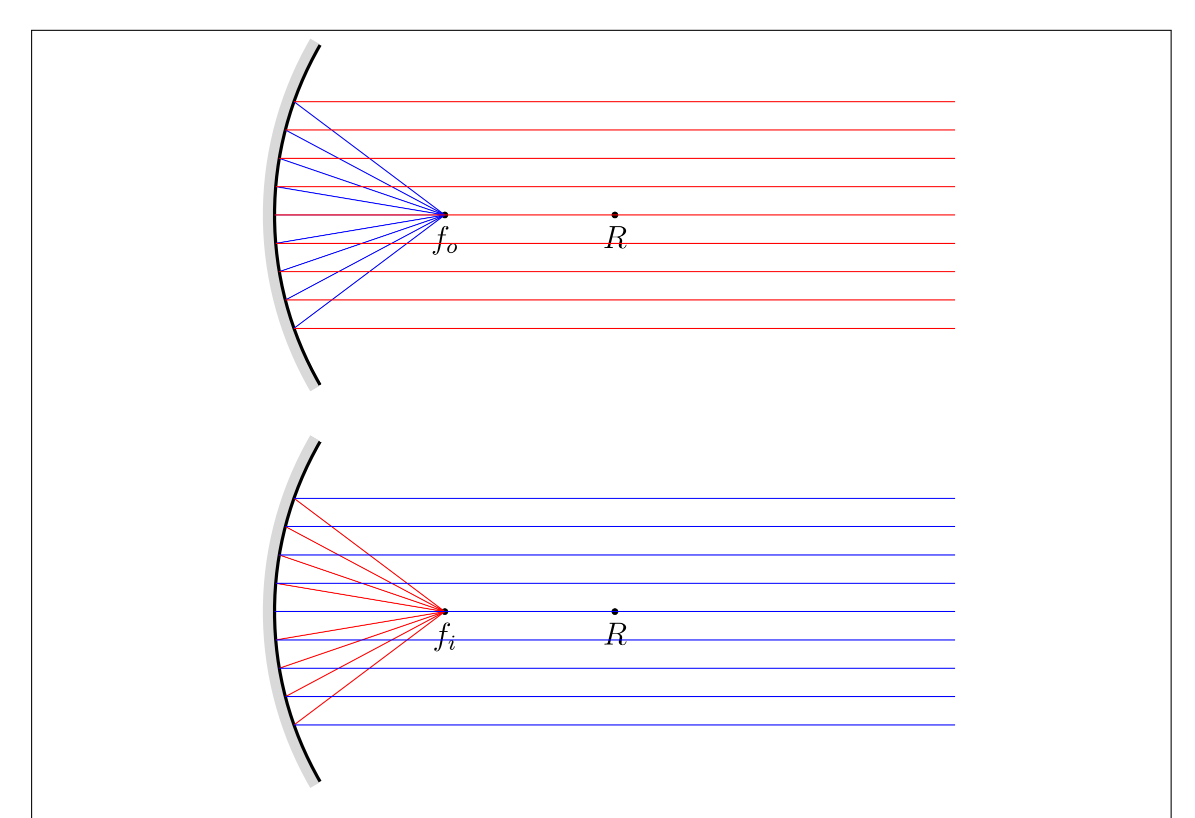


Figura 15.8: Esquemas de rayos para analizar la geometría de las posiciones focales de un espejo esférico. Observe que los dos gráficos son idénticos pero la inversión de colores indica cuáles son los rayos incidentes (azules) y los reflejados (rojos).

En las Figuras 15.8 mostramos la marcha de rayos en un espejo cóncavo para visualizar la coincidencia entre las posiciones focales objeto e imagen.

Analicemos ahora lo que ocurre con las lentes delgadas (ver Figura 15.9). Combinando la ecuación (15.29) y las definiciones de puntos focales resulta

$$\frac{1}{f_o} = (n-1)\left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a}\right) \tag{15.33}$$

$$-\frac{1}{f_i} = (n-1)\left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a}\right) \tag{15.34}$$

A la ecuación 15.33 se la llama **fórmula del constructor de lentes**, por lo que discutiremos brevemente la razón de esta denominación. El lector observará que en el segundo miembro de la mencionada ecuación solo hay información geométrica (R_a y R_b) e información acerca del material (n). De este modo, podemos

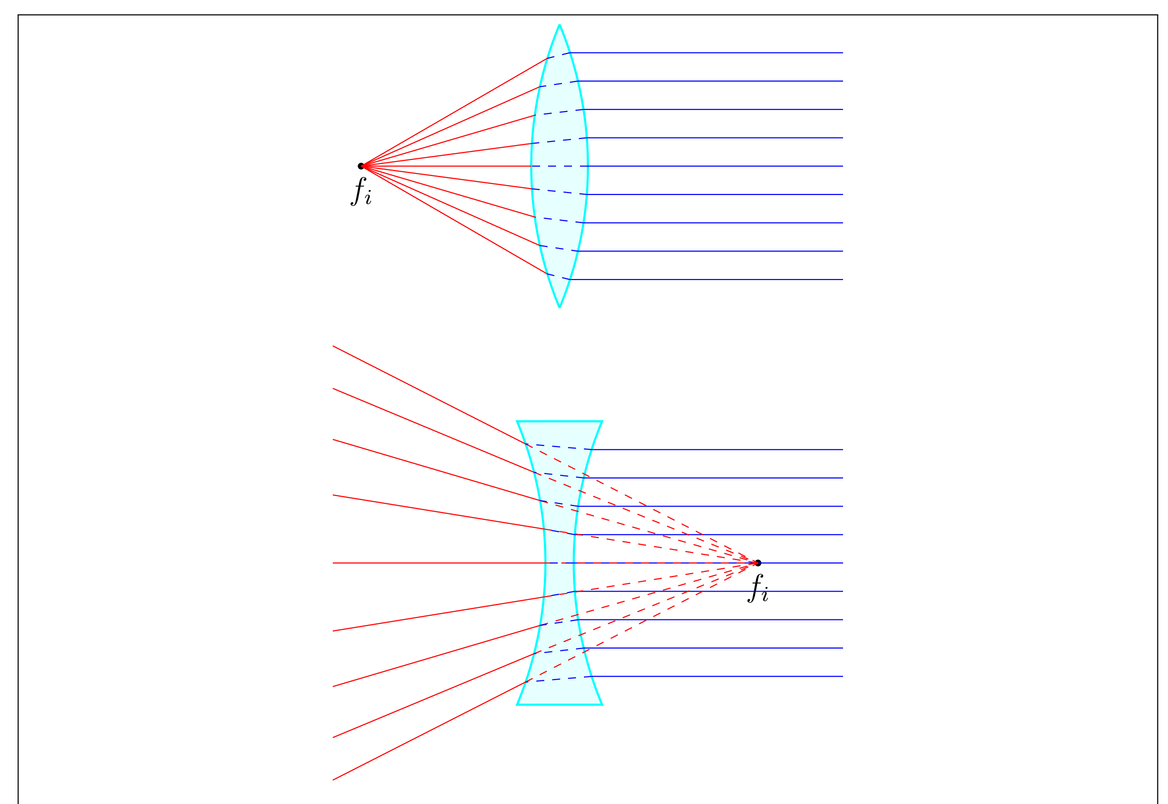


Figura 15.9: Esquema de rayos indicando las posiciones focales imagen para una lente convergente y una lente divergente.

decir que una distancia focal objeto especificada puede obtenerse mediante diferentes combinaciones de radios e índices de refracción. Por ejemplo, cuando un oftalmólogo receta lentes, especifica su distancia focal. Luego, el constructor de lentes define los radios apropiados en concordancia con el material elegido para obtener esa distancia focal.

Teniendo en cuenta la ecuación (15.33) podemos escribir una forma muy simplificada de la ecuación (15.29)

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z'} = \frac{1}{f_o} \tag{15.35}$$

Por otra parte, combinando las ecuaciones (15.33) y (15.34), es fácil observar que las posiciones focales objeto e imagen se sitúan simétricamente a cada lado de la lente

$$f_i = -f_o \tag{15.36}$$

En la práctica de la construcción de lentes se utiliza una unidad llamada **dioptría** cuya abrevitura es Dp. La misma refiere a la inversa de la distancia focal objeto ($1/f_o$) y se define como

$$1\,\text{Dp} = 1\,\text{m}^{-1} \tag{15.37}$$

Por ejemplo, una lente de 4Dp tiene una distancia focal objeto $f_o = 0.25\,\text{m}$. A la inversa de la distancia focal objeto medida en dioptrías se la suele denominar **potencia de la lente**. La potencia puede ser positiva o negativa según sea el signo de la distancia focal objeto. Cuando las lentes poseen una potencia positiva se las llama **convergentes**. Por el contrario, si la potencia es negativa, la lente se dice **divergente**. En la Figura 15.9 se muestran las marchas de los rayos en una lente convergente y en una lente divergente.

15.11. Espejos parabólicos

Los espejos parabólicos constituyen la base para comprender innumerables dispositivos de uso habitual, como telescopios, antenas parabólicas, reflectores, concentradores solares, etc. Todos estos artefactos contienen una superficie reflectante con forma de paraboloide de revolución, apta para el tipo de onda en que opera en cada caso. Esta geometría tiene la propiedad de reflejar todos los rayos paralelos al eje de simetría pasando por su foco. Recíprocamente, los rayos provenientes del foco se reflejan paralelos al eje de simetría. Tal vez el lector pueda pensar que los espejos esféricos hacen lo mismo. Para notar la diferencia, recordemos que los espejos esféricos tienen un foco definido solo si los rayos involucrados son paraxiales. Tal restricción no existe en los espejos parabólicos.

Para probar la propiedad de los espejos parabólicos consideremos un paraboloide de revolución con el origen de coordenadas situado en su vértice y el eje z coicidente con su eje de simetría (ver Figura 15.10). En coordenadas cilíndricas su forma explícita será

$$z(\rho) = \frac{\rho^2}{4a} \tag{15.38}$$

donde a es una constante cuyo significado determinaremos más adelante.

Supongamos ahora que un rayo incide sobre el espejo en una dirección paralela al eje z. Sea P el punto de coordenadas ρ_0 y z_0 donde ocurre la reflexión (ver Figura 15.10). Sea N la recta normal al paraboloide en el punto P, y T la recta tangente contenida en el plano del dibujo[5]. El rayo reflejado debe estar en

[5]Estrictamente, uno debiera hablar del plano tangente en P. Sin embargo, la simetría del sistema nos permite convalidar un tratamiento bidimensional donde toma sentido el concepto de

el plano del dibujo por lo que necesariamente cortará al eje z en un punto que denoraremos por Q. Naturalmente, los ángulos que forman los rayos incidente y reflejado, respecto de la dirección normal, son iguales y los denotaremos por α. Es fácil observar que la recta tangente forma también un ángulo α con la horizontal. De esto se sigue que la pendiente de la recta tangente m_T será

$$m_T = \tan(\alpha) = \left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{\rho_0} = \frac{\rho_0}{2a} \tag{15.39}$$

de donde se sigue que el ángulo α es

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\rho_0}{2a}\right) \tag{15.40}$$

Aquí conviene recordar qué estamos buscando. Nuestra espectativa es que todos los rayos que llegan paralelos al eje z se reflejan pasando por un único punto contenido en dicho eje, independientemente de qué tan lejos esté el punto P del eje z. Esto puede traducirse en la siguiente estrategia: si encontramos la ordenada al origen de la recta que contiene al segmento PQ (rayo reflejado), y observamos que la misma es independiente de ρ_0, habremos probado lo que buscamos. Además, habremos encontrado la localización del foco imagen.

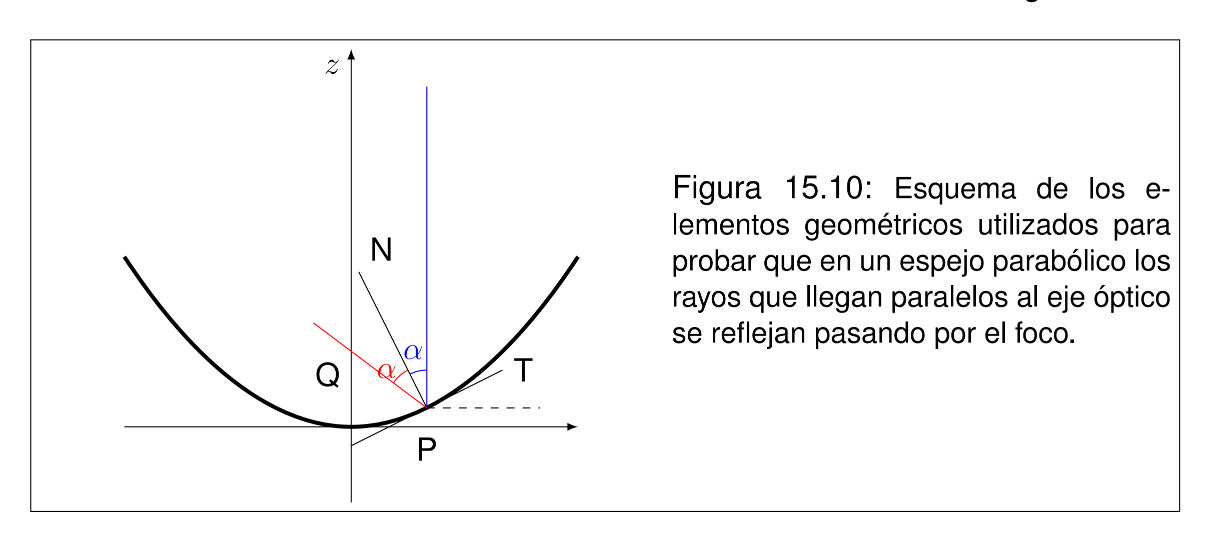


Figura 15.10: Esquema de los elementos geométricos utilizados para probar que en un espejo parabólico los rayos que llegan paralelos al eje óptico se reflejan pasando por el foco.

Escribamos la ecuación de la recta que contiene al rayo reflejado. Para ello observemos que el ángulo que la misma forma con el eje horizontal es $\pi/2 + 2\alpha$. Entonces, su pendiente será:

$$m_{PQ} = \tan(2\alpha + \pi/2) = -\cot(2\alpha) = -\frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \tag{15.41}$$

recta tangente en P. El lector debe comprender el dibujo como un corte en un plano que contenga al eje z y al rayo incidente.

Utilizando identidades trigonométricas muy conocidas, se puede demostrar que

$$m_{PQ} = -\frac{1}{2\tan(\alpha)} + \frac{\tan(\alpha)}{2} \tag{15.42}$$

Reemplazando el resultado (15.40) en (15.42) obtenemos la forma definitiva de m_{PQ}, esto es

$$m_{PQ} = -\frac{a}{\rho_0} + \frac{\rho_0}{4a}. \tag{15.43}$$

Ahora estamos en condiciones de escribir la ecuación de la recta, observando que la misma pasa por el punto P de coordenadas ρ_0 y z_0

$$z - z_0 = m_{PQ}(\rho - \rho_0) \tag{15.44}$$

donde z_0 se obtiene a partir de (15.38) y toma el valor $z_0 = \rho_0^2/4a$. Reemplazando z_0 y m_{PQ} en (15.44) se obtiene la forma explícita de la recta

$$z = \left(-\frac{a}{\rho_0} + \frac{\rho_0}{4a}\right)\rho + a \tag{15.45}$$

Aquí podemos observar que la ordenada al origen toma el valor a, por lo que resulta independiente de ρ_0. Así queda demostrado que cualquiera sea el punto P en el que incide un rayo paralelo al eje z, el correspondiente rayo reflejado pasa siempre por el punto del eje z de ordenada a. Este lugar geométrico será entonces el foco imagen de nuestro espejo y a representa su localización respecto del vértice (distancia focal imagen).

El análisis que acabamos de realizar hubiera sido exactamente igual si lo hubiéramos hecho suponiendo que la luz viajaba en sentido inverso. Esto es, si pensamos que el punto de convergencia situado en $z = a$ es un punto objeto, los rayos reflejados resultarían paralelos al eje z. Consecuentemente, y en concordancia con lo que ocurría en espejos esféricos, el punto focal objeto coincide con el punto focal imagen

$$f_i = f_o = a \tag{15.46}$$

Es interesante que el lector observe que formalmente un paraboloide de revolución se define como el conjunto de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y un plano llamado directriz. Aquí podemos entender la razón que tuvieron los matemáticos para llamar **foco** al punto incluido en la definición.

15.12. Desviación de la luz por un prisma

En esta sección analizaremos la refracción de la luz, cuando la misma atraviesa un cuerpo transparente de índice de refracción n, cuyas superficies forman un diedro. Supongamos que el ángulo de dicho diedro es α. El cuerpo más elemental que presenta esta geometría es un prisma recto triangular. En la Figura 15.11 mostramos un corte del prisma y la trayectoria de un rayo luminoso contenido en el plano del corte.

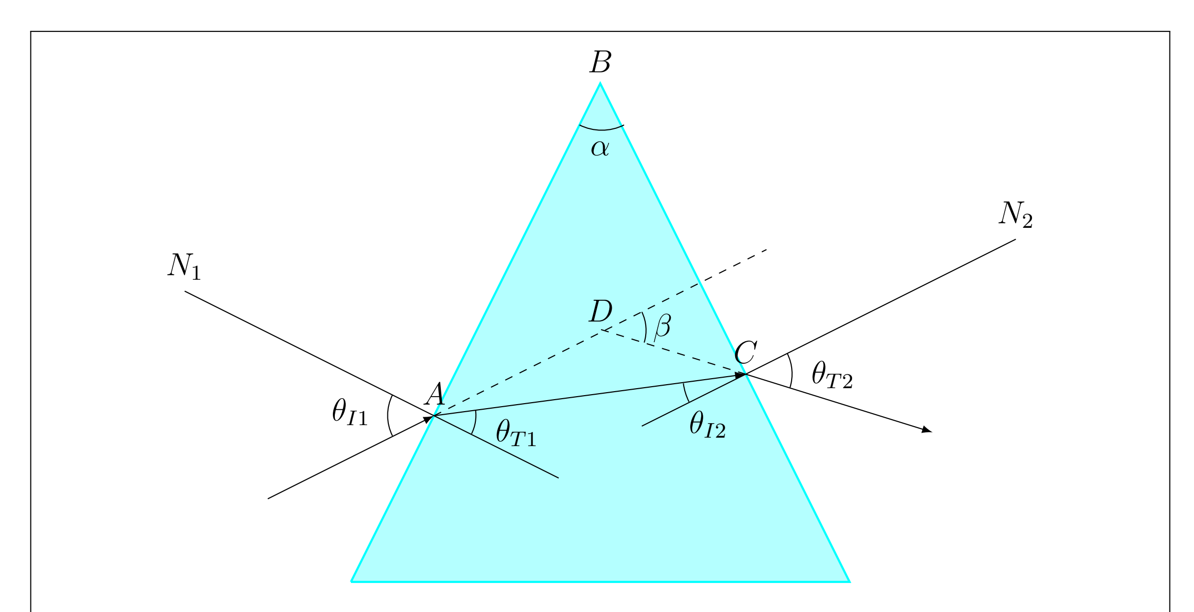


Figura 15.11: Esquema de los elementos geométricos necesarios para deducir el ángulo de desviación de un prisma. La trayectoria del rayo luminoso se indica con flechas.

Allí observamos dos refracciones (a las que referiremos como 1 y 2). Identificamos por N_1 y N_2 a las rectas normales a cada superficie en los puntos donde ocurren las refracciones. Los ángulos de incidencia y transmisión (referidos a las normales respectivas) son θ_{I1}, θ_{T1}, θ_{I2} y θ_{T2}. El ángulo de desviación β se define como el ángulo que forman el rayo incidente y el rayo emergente. En la Figura se lo indica agregando las prolongaciones de los rayos mencionados en líneas de trazos. En el análisis que sigue supondremos que el espacio circundante es vacío, por lo que su índice de refracción es la unidad[6].

Para iniciar el tratamiento apelamos a la destreza geométrica del lector. Como los ángulos interiores del triángulo ABC deben sumar π, tenemos que

[6]Observe el lector que esta suposición no le quita generalidad al análisis, ya que para un medio circundante homogéneo de índice de refracción n', solo será necesario el reemplazo de n por el cociente n/n'.

$$\alpha \;=\; \theta_{T1} \,+\, \theta_{I2} \tag{15.47}$$

Por su parte, los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$ deben sumar 2π, por lo que se tiene

$$\alpha \,+\, \beta \;=\; \theta_{I1} \,+\, \theta_{T2} \tag{15.48}$$

La ley de Snell puede aplicarse en las dos refracciones, Así obtenemos las siguientes relaciones angulares

$$\sin(\theta_{I1}) \;=\; n\,\sin(\theta_{T1}) \tag{15.49}$$
$$n\,\sin(\theta_{I2}) \;=\; \sin(\theta_{T2}) \tag{15.50}$$

Con las expresiones (15.47), (15.48), (15.49) y (15.50) es suficiente para escribir el ángulo de desviación β en función del ángulo de incidencia θ_{I1}. Sin embargo, la expresión despejada es poco práctica, por lo que recomendamos la siguiente secuencia de cálculo

$$\begin{aligned}
\theta_{T1} \;&=\; \arcsin\left[\frac{1}{n}\,\sin(\theta_{I1})\right] \\
\theta_{I2} \;&=\; \alpha \,-\, \theta_{T1} \\
\theta_{T2} \;&=\; \arcsin\left[\,n\,\sin(\theta_{I2})\,\right] \\
\beta \;&=\; \theta_{I1} \,+\, \theta_{T2} \,-\, \alpha
\end{aligned} \tag{15.51}$$

Esta secuencia es muy apropiada para una solución computacional, basada en expresiones analíticas, donde se ingresa el ángulo θ_{I1} y el programa devuelve el ángulo de desviación β.

Ahora buscaremos las condiciones en que el ángulo de desviación β se hace máximo. Para ello, comencemos por derivar la expresión (15.48) respecto de θ_{I1}. Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{d\beta}{d\theta_{I1}} \;=\; 1 \,+\, \frac{d\theta_{T2}}{d\theta_{I1}} \;=\; 1 \,+\, \frac{d\theta_{T2}}{d\theta_{I2}}\,\frac{d\theta_{I2}}{d\theta_{T1}}\,\frac{d\theta_{T1}}{d\theta_{I1}} \tag{15.52}$$

Las tres derivadas involucradas pueden deducirse respectivamente de las expresiones (15.50), (15.47) y (15.49).

$$\frac{d\theta_{T2}}{d\theta_{I2}} \;=\; \frac{n\,\cos\left(\theta_{I2}\right)}{\cos\left(\theta_{T2}\right)} \qquad \frac{d\theta_{I2}}{d\theta_{T1}} \;=\; -1 \qquad , \frac{d\theta_{T1}}{d\theta_{I1}} \;=\; \frac{\cos\left(\theta_{I1}\right)}{n\,\cos\left(\theta_{T1}\right)} \tag{15.53}$$

Reemplazando estos resultados en (15.52), obtenemos

$$\frac{d\beta}{d\theta_{I1}} \;=\; 1 \,-\, \frac{\cos\left(\theta_{I2}\right)\,\cos\left(\theta_{I1}\right)}{\cos\left(\theta_{T2}\right)\cos\left(\theta_{T1}\right)} \tag{15.54}$$

Para obtener el valor extremo de β, anulamos la derivada (15.54). Utilizaremos la notación β^* para el ángulo de desviación máxima, haciendo expansivo el símbolo “*" para todos los ángulos involucrados cuando β es máximo. Entonces tenemos

$$0 \;=\; 1 \,-\, \frac{\cos\left(\theta^*_{I2}\right)\,\cos\left(\theta^*_{I1}\right)}{\cos\left(\theta^*_{T2}\right)\cos\left(\theta^*_{T1}\right)} \;\rightarrow\; \cos\left(\theta^*_{I2}\right)\,\cos\left(\theta^*_{I1}\right) \;=\; \cos\left(\theta^*_{T2}\right)\cos\left(\theta^*_{T1}\right) \tag{15.55}$$

Trabajando con identidades trigonométricas, buscamos relaciones entre los ángulos. Elevamos al cuadrado ambos miembros de (15.55) y luego reemplazamos en términos de senos. Así tenemos

$$\left[1 \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{I2}\right)\right]\;\left[1 \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{I1}\right)\right] \;=\; \left[1 \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{T2}\right)\right]\;\left[1 \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{T1}\right)\right] \tag{15.56}$$

que distribuyendo adquiere la forma

$$\begin{aligned} 1 \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{I2}\right) \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{I1}\right) \,+\, \sin^2\left(\theta^*_{I2}\right)\,\sin^2\left(\theta^*_{I1}\right) \;= \\ =\; 1 \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{T2}\right) \,-\, \sin^2\left(\theta^*_{T1}\right) \,+\, \sin^2\left(\theta^*_{T2}\right)\,\sin^2\left(\theta^*_{T1}\right) \end{aligned} \tag{15.57}$$

Por otra parte, multiplicando miembro a miembro las expresiones (15.49) y (15.50), evaluadas en la condición de máxima desviación, tenemos

$$\sin\left(\theta^*_{I2}\right)\,\sin\left(\theta^*_{I1}\right) \;=\; \sin\left(\theta^*_{T2}\right)\sin\left(\theta^*_{T1}\right) \tag{15.58}$$

Esta relación nos permite cancelar términos de (15.67), por lo que obtenemos lo siguiente

$$\sin^2(\theta^*_{I1}) \,-\, \sin^2(\theta^*_{T1}) \,=\, \sin^2(\theta^*_{T2}) \,-\, \sin^2(\theta^*_{I2}) \tag{15.59}$$

Nuevamente las expresiones (15.49) y (15.50) nos aportan sus servicios

$$n^2\,\sin^2(\theta^*_{T1}) \,-\, \sin^2(\theta^*_{T1}) \,=\, n^2\,\sin^2(\theta^*_{I2}) \,-\, \sin^2(\theta^*_{I2}) \tag{15.60}$$

o bien

$$\left(n^2 \,-\, 1\right)\,\sin^2(\theta^*_{T1}) \,=\, \left(n^2 \,-\, 1\right)\,\sin^2(\theta^*_{I2}) \tag{15.61}$$

Observando que los ángulos involucrados son siempre agudos, la única posibilidad es que

$$\theta^*_{T1} \,=\, \theta^*_{I2} \tag{15.62}$$

Si evaluamos las relación (15.47) en la condición precedente, podemos determinar los valores de θ^*_{T1} y θ^*_{I2}. Esto es

$$\theta^*_{T1} \,=\, \theta^*_{I2} \,=\, \frac{\alpha}{2} \tag{15.63}$$

Ahora, las expresiones (15.49) y (15.50) nos conducen determinar los ángulos θ^*_{I1} y θ^*_{T2}.

$$\begin{array}{l} \sin(\theta^*_{I1}) \,=\, n\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ n\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \,=\, \sin(\theta^*_{T2}) \end{array} \quad\rightarrow\quad \theta^*_{I1} \,=\, \theta^*_{T2} \,=\, \arcsin\left[\,n\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \tag{15.64}$$

Finalmente, la expresión (15.49) nos conduce la valor del ángulo de máxima desviación β^*.

$$\beta^* \,=\, 2\,\arcsin\left[\,n\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \,-\, \alpha \tag{15.65}$$

Analicemos este resultado. En primer lugar observemos que las expresiones (15.63) y (15.64) nos permiten concluir que la trayectoria de la luz es simétrica respecto de la bisectriz del ángulo α. Tal situación se representa en la Figu-

ra 15.12.

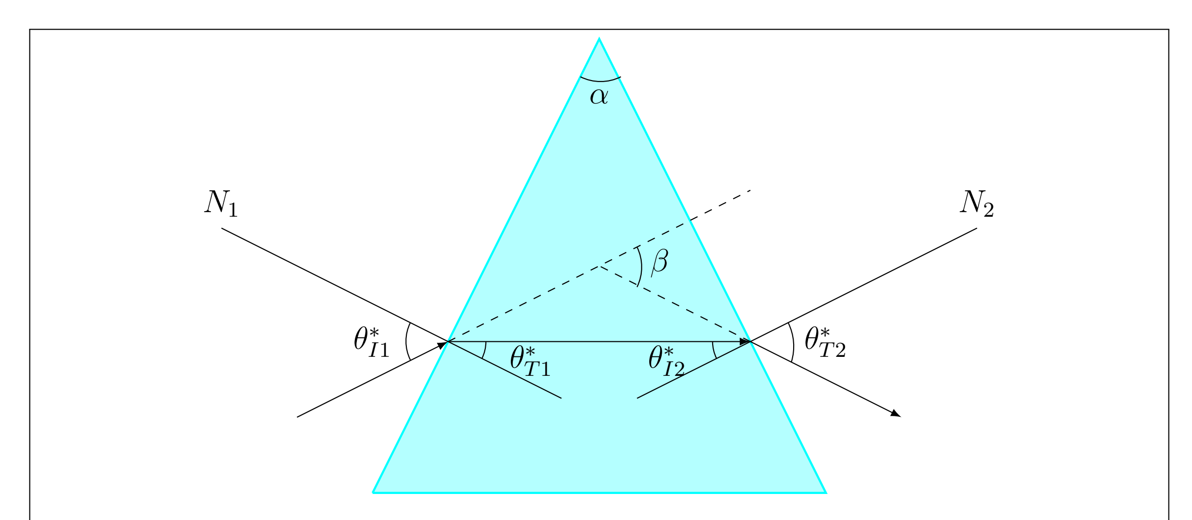


Figura 15.12: Esquema de la trayectoria del rayo de máxima desviación en un prisma, indicando los ángulos involucrados en la deducción. Observe que la trayectoria es simétrica respecto de la bisectriz del ángulo α.

Por otra parte, como la expresión (15.65) contiene un arcoseno, el argumento correspondiente está limitado de modo que su valor no supere la unidad. Esta condición será

$$n\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\;<\;1 \qquad \rightarrow \qquad \alpha\;<\;2\,\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \tag{15.66}$$

Si esta condición no se cumpliera, la desviación máxima no ocurriría con el formato simétrico deducido. En tal caso, β^* se correspondería con el máximo ángulo de incidencia posible. Esto es $\theta^*_{I1}=\pi/2$. Luego, la secuencia (15.51) nos conduciría al valor de β^*.

15.13. Desviación de la luz por un cuerpo esférico

Consideremos una esfera transparente de radio R, con índice de refracción uniforme n. Supongamos que un rayo de luz incide sobre la esfera, experimentando refracciones al entrar y al salir de la misma. Nos proponemos determinar el ángulo β entre el rayo emergente y el rayo incidente, al que llamaremos ángulo de desviación. Utilizaremos notaciones semejantes a las introducidas para prismas. Esto es, los subíndices I y T refieren a rayos incidentes y transmitidos, mientras que los subíndices 1 y 2 dan cuenta de primera refracción y segunda

refracción. En la Figura 15.13 indicamos la trayectoria de la luz y el significado de las notaciones.

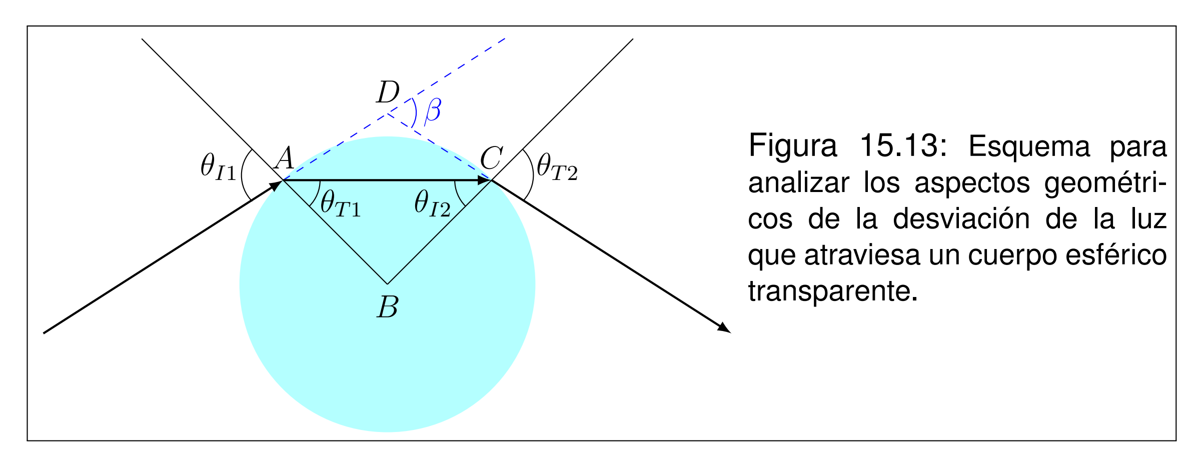


Figura 15.13: Esquema para analizar los aspectos geométricos de la desviación de la luz que atraviesa un cuerpo esférico transparente.

Para comenzar el análisis, observemos que las rectas radiales que pasan por los puntos donde ocurren las refracciones son siempre normales en dichos puntos. Entre dichas rectas y el tramo de rayo interior a la esfera, definen un plano que contiene al centro de la esfera y los rayos incidente y emergente. La simetría de la esfera conduce a que el triángulo ABC sea isósceles, por lo que

$$\theta_{T1} \;=\; \theta_{I2} \tag{15.67}$$

Por aplicación de la ley de Snell en las dos refracciones, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sin(\theta_{I1}) & = & n \sin(\theta_{T1}) \\ n \sin(\theta_{I2}) & = & \sin(\theta_{T2}) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \theta_{I1} \;=\; \theta_{T2} \tag{15.68}$$

Luego, observando el triángulo ACD podemos deducir una relación angular para determinar la desviación β

$$\beta \;=\; 2\,(\theta_{I1} \;-\; \theta_{T1}) \tag{15.69}$$

Aquí la ley de Snell nos permite escribir una relación entre β y el ángulo de incidencia θ_{I1}

$$\beta \;=\; 2\left\{\,\theta_{I1} \;-\; \arcsin\left[\,\frac{1}{n}\,\sin(\theta_{I1})\,\right]\,\right\} \tag{15.70}$$

El ángulo de incidencia θ_{I1} puede tomar valores en el intervalo $[0, \pi/2]$. Cuando

$\theta_{I1} = 0$, significa que la luz ingresa a la esfera en forma radial. Luego recorre uno de sus diámetros y emerge en forma radial sin desviarse ($\beta = 0$). Cuando $\theta_{I1} = \pi/2$ ocurre la máxima desviación posible. La representamos por β^* y de acuerdo con (15.70) toma la forma siguiente

$$\beta^* = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \tag{15.71}$$

15.14. Problemas

1. Considere una pileta de natación de 1.8 m de profundidad, en la cual flota un plato de madera de 40 cm de diámetro. En el centro del plato yace una vela encendida de 15 cm de altura. ¿Cuál será el diámetro de la sombra proyectada por el plato sobre el fondo de la pileta durante la noche, en ocasión de ser iluminado exclusivamente por la luz de la vela?

2. Muchos instrumentos diseñados con el objeto de concentrar la radiación electromagnética proveniente de fuentes remotas, utilizan antenas o espejos parabólicos. Como ejemplo podemos citar radares, antenas satelitales, telescopios, radiotelescopios, etc. Todos estos instrumentos aprovechan una propiedad de los paraboloides de revolución, que consiste en reflejar todos los rayos paralelos a su eje de simetría, pasando por el foco.

    a) Pruebe esta propiedad, observando que la misma no requiere la aproximación paraxial utilizada en espejos esféricos.

    b) Discuta la posibilidad de utilizar esta propiedad en forma inversa, y cite ejemplos de tal aplicación.

3. Considere un espejo cóncavo de radio $R = 40$ cm frente al cual se coloca un objeto de altura $h = 1$ cm. Calcule las posiciones, tamaños y orientaciones de las imágenes formadas para el objeto colocado a 10 cm, 20 cm, 40 cm y 80 cm del vértice del espejo (resuelva gráfica y analíticamente).

4. Demuestre analíticamente que las imágenes producidas por un espejo cóncavo serán reales o virtuales, según el objeto se encuentre delante o detrás del foco.

5. Utilice la ley de Snell para deducir una expresión que relacione las posiciones objeto e imagen para una superficie dióptrica esférica en la aproximación paraxial.

6. A partir de la expresión obtenida en el problema anterior, deduzca una relación entre las posiciones objeto e imagen para una lente delgada, de caras esféricas de radios R_1 y R_2.

7. Una lupa constituída por una lente delgada de vidrio (índice de refracción $n = 1.5$) genera una imagen nítida del Sol cuando se la coloca a 16 cm del piso. Si la lente es biconvexa simétrica

    a) Calcule el radio de curvatura de sus caras.

    b) ¿Dónde se formará la imagen de una estampilla examinada con esta lupa, cuando la distancia entre la lupa y la estampilla sea de 10 cm?

8. Una esfera maciza de vidrio se coloca de modo que su centro queda en el punto medio entre una fuente luminosa y un observador que se encuentran separados 1 m. Si el radio de la esfera es $R = 10$ cm y su índice de refracción es $n = 1.5$, calcule:

a) ¿A qué distancia del observador se formará la imagen?

b) ¿De qué tipo de imagen se trata?

9. Una esfera macisa de vidrio de índice de refracción $n = 1.5$ se corta por la mitad (es decir, a través de un plano meridional), y una de las partes se utiliza como lente gruesa. Asumiendo que el radio de la superficie esférica es de $12\,\text{cm}$ y que la luz ingresa por dicha superficie, calcule la posición del foco imagen para rayos paraxiales que llegan según el eje de simetría de la lente.

10. Considere una esfera maciza de radio R hecha de vidrio cuyo índice de refracción es $n = 1.5$. Suponga que uno de sus hemisferios está plateado con una delgada capa conductora. Dentro de la esfera existe una pequeña burbuja de aire situada a mitad de camino entre el centro de la esfera y el polo del hemisferio plateado. Considerando exclusivamente rayos paraxiales alrededor del eje que contiene al centro de la esfera y a la burbuja:

    a) Construya un diagrama indicando la marcha de rayos que nacen en la burbuja y emergen del sistema.

    b) Calcule las posiciones objeto e imagen relativas a cada superficie en cada proceso de reflexión o refracción. Indique si se trata de objetos o imágenes reales o virtuales.

    c) Indique cuáles de las imágenes calculadas es detectable para un observador externo.

11. Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas alineadas. Las distancias focales son respectivamente $f_1 = 37\,\text{mm}$ y $f_2 = 55\,\text{mm}$, mientras que la distancia entre las lentes es $d = 27\,\text{mm}$. Encuentre las posiciones de los puntos principales del sistema. Construya gráficos de rayos para visualizar los puntos principales.

Capítulo 16
Interferencia y Difracción

16.1. Interferencia

El fenómeno de **interferencia** ocurre cuando dos ondas electromagnéticas coexisten en una región, y su superposición da lugar efectos de intensificación o atenuación de la intensidad que perduran en el espacio y en el tiempo. Para que los efectos sean observables, las ondas deben cumplir un conjunto de condiciones bastante restrictivas (no siempre las mismas) que hacen infrecuente al fenómeno en condiciones naturales. Sin embargo, podemos citar como ejemplos en el rango óptico, la intensificación de colores iridiscentes en algunos insectos como tábanos (verdes) o ciertas avispas (azules), los efectos tornasolados en las plumas de la cola de los pavos reales, las imágenes por reflexión en las burbujas que van mutando de tonalidad con el tiempo y las bandas multicolores en los bordes de las gotas de aceite. La tecnología también aporta sus ejemplos, como las láminas reflectantes o antirreflectantes (que se utilizan para generar vidrios espejados o antireflex respectivamente), o los interferómetros que se usan en técnicas de calibración en metrología.

En sentido amplio, el término interferencia sería aplicable a cualquier superposición de ondas cuyo resultado sea una onda en la que la amplitud pueda expresarse como una función regular de la posición y del tiempo. Así, los fenómenos de batido o las ondas estacionarias pueden interpretarse como casos de interferencia. Sin embargo, el uso del término lo fue restringiendo a un significado más específico. Entonces, en sentido estricto, decimos que se produce una interferencia cuando dos ondas monocromáticas de igual frecuencia y estado de polarización, coexisten viajando en la misma dirección y sentido, cumpliendo condiciones de coherencia[1].

[1] Este concepto será tratado con detalle en secciones posteriores.

16.2. El modelo básico

Comencemos por construir el modelo más simple que pone de manifiesto los efectos mencionados. Para ello consideremos dos ondas electromagnéticas monocromáticas planas, de igual frecuencia y amplitud, que se propagan por la misma región, con la misma dirección y sentido, ambas linealmente polarizadas con los vectores eléctricos en la misma dirección. Sin pérdida de generalidad, describimos dichas ondas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(z,t) &= E_0 \sin(kz - \omega t + \phi_1)\ \breve{\imath} \\ \vec{E}_2(z,t) &= E_0 \sin(kz - \omega t + \phi_2)\ \breve{\imath} \end{aligned} \tag{16.1}$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 representan fases constantes posiblemente diferentes. El lector observará que los argumentos de las dos ondas, para una posición y un tiempo especificados, solo difieren en una fase fija. Denotaremos por $\Delta\phi$ a la diferencia de fase fija dada por

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \tag{16.2}$$

Eligiendo adecuadamente el origen de tiempos, siempre pueden tomarse ϕ_1 y ϕ_2 de la siguiente manera

$$\phi_1 = -\frac{\Delta\phi}{2} \quad \text{y} \quad \phi_2 = \frac{\Delta\phi}{2} \tag{16.3}$$

Ahora procederemos a sumar las dos ondas, para lo cual es conveniente hacer la siguiente sustitución con vistas a cálculos posteriores

$$u = kz - \omega t \tag{16.4}$$

Entonces tendremos que el campo eléctrico en la región será

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_1(z,t) + \vec{E}_2(z,t) \tag{16.5}$$

Reemplazando en (16.5) las formas explícitas de las ondas (16.1), con las sustituciones (16.3) y (16.4), tenemos

$$\vec{E} \;=\; E_0 \,\sin\left(u \,-\, \frac{\Delta\phi}{2}\right) \breve{\imath} \,+\, E_0 \,\sin\left(u \,+\, \frac{\Delta\phi}{2}\right) \breve{\imath} \tag{16.6}$$

donde hemos omitido las dependencias para compactar la escritura. Ahora operamos mediante identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \vec{E} \;=\; E_0 \, \Bigg[& \sin(u) \, \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \,-\, \cos(u) \, \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \\ & +\, \sin(u) \, \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \,+\, \cos(u) \, \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \Bigg] \; \breve{\imath} \end{aligned} \tag{16.7}$$

Observe que el segundo y cuarto términos del corchete se anulan, mientras que el primero y el tercero se suman. Con esto tenemos que

$$\vec{E} \;=\; 2\,E_0 \,\sin(u) \, \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \; \breve{\imath} \tag{16.8}$$

Reordenando y completando con las dependencias, obtenemos

$$\vec{E}\,(z,t) \;=\; 2\,E_0 \,\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \, \sin(kz \,-\, \omega t) \; \breve{\imath} \tag{16.9}$$

En esta expresión puede ovservarse que la superposición de las ondas (16.1) da como resultado una nueva onda plana de idénticas características que las mencionadas, cuya amplitud E_0^* depende de la diferencia de fase $\Delta\phi$

$$E_0^* \;=\; 2\,E_0 \,\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \tag{16.10}$$

Naturalmente, la diferencia de fase puede tomar cualquier valor fijo, que será único para toda la región en la que ocurra la superposición.

Ahora nos ocuparemos de los valores extremos de la amplitud de la onda resultante. Para ello observemos que la amplitud se anula cuando se anula el coseno, mientras que sus máximos valores absolutos los adquiere cuando el coseno alcanza la unidad. Así, los valores de la diferencia de fase $\Delta\phi$ asociados a las conductas extremas serán los siguientes

$$
\begin{aligned}
E_0^* &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\phi &= (2m+1)\,\pi \\
E_0^* &= 2\,E_0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Delta\phi &= 2m\pi
\end{aligned}
\tag{16.11}
$$

donde m toma valores enteros positivos $(m = 0, 1, 2, ...)$. Entonces podemos decir que la amplitud será nula o máxima conforme la diferencia de fase sea un número impar o par de veces π. Cuando la amplitud es nula se dice que la interferencia es **destructiva**, mientras que cuando la amplitud es máxima la interferencia se llama **constructiva**.

16.3. Sobre el concepto de coherencia

En el modelo básico, las ondas consideradas son descriptas mediante funciones regulares de la posición y del tiempo. Esto significa que dos observadores alineados en la dirección de propagación tendrían la opción de considerar la distancia que los separa como unívocamente asociada a la diferencia de fase que la onda tiene entre sus posiciones. Esto puede cumplirse razonablemente bien cuando las ondas son producidas por antenas, pero el modelo no ajusta para la luz producida por fuentes naturales. Este es el caso de la luz del Sol y de la mayor parte de las lámparas, donde la luz se origina por mecanismos bastante distintos.

Sin intentar un abordaje general para la descripción de la luz natural, podemos avanzar sobre un modelo que incluya la fenomenología de relevancia en interferencia. Para ello, bastará imaginar que la función que describe la onda tiene aspecto armónico en tramos de 20 o 30 longitudes de onda, y que dichos tramos están separados por intervalos de longitud irregular en que los campos son nulos (ver Figura 16.1).

Teniendo en cuenta este modelo, es fácil observar que la superposición de dos ondas provenientes de distintas fuentes no tendrán una diferencia de fase uniforme en todas partes. Más aún, si los intervalos de campo nulo en cada onda tienen longitudes estadísticamente distribuidas, las relaciones de fase para un observador fijo, tomarán todos los valores posibles y el fenómeno de interferencia no se observará.

Aquí cabe preguntarse, cómo debieran ser generados dos haces para que sea posible la visualización sostenida de una intensificación o una atenuación de la luz natural por interferencia. La respuesta es bastante simple. La única posibilidad es que los dos haces provengan de la misma fuente natural, de modo que

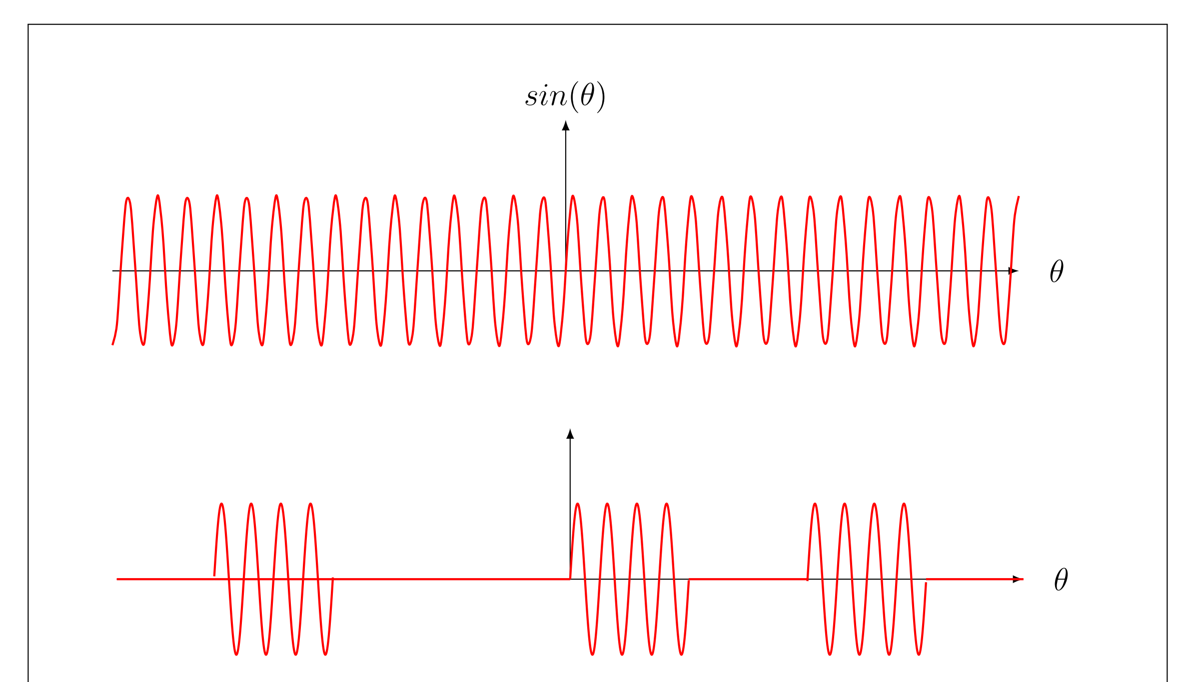


Figura 16.1: En la figura superior se representa una onda senoidal tal como la expresamos matemáticamente. En la figura inferior incluimos una modificación que nos permite imaginar (al menos simplificadamente), el aspecto que toma una onda real en relación con la coherencia. Si bien los tramos están construidos con unas pocas longitudes de onda, debemos imaginar que en la práctica estos tramos se extienden por 20 o 30 longitudes de onda para la luz natural visible.

los intervalos irregulares de campo nulo sean los mismos para ambos. Luego, solo falta que el corrimiento entre ellos (es decir la diferencia de fase) sea menor que 20 o 30 longitudes de onda. Esta medida resulta altamente restrictiva por lo que el fenómeno de interferencia en luz natural es muy esquivo. Tomando en cuenta que la longitud de onda media de la luz está en 550 nm, resulta que 30 longitudes de onda miden tan solo $0,0165$ mm (longitud del orden de la centésima de milímentro). Conviene recordar este orden de magnitud, para tener claro en sistemas físicos reales si es viable la observación de intensificaciones o atenuaciones de la intensidad de la luz por interferencia. En los ejemplos de aplicación veremos cómo influye la coherencia mediante la introducción de un parámentro que define la longitud media de los tramos en los que domina la forma armónica. Este parámetro se denomina **longitud de coherencia**, y se suele especificar en longitudes de onda. Como ya habíamos adelantado, en fuentes naturales está entre 20 y 30 longitudes de onda.

16.4. El concepto de camino óptico

Para comprender el concepto de **camino óptico**, conviene pensar en la luz como si su longitud de coherencia fuera infinita. Naturalmente, esto no se ajusta con la realidad, pero lo admitimos como modelo para iniciar el análisis. Entonces comencemos por imaginar el camino que traza un rayo luminoso desde que sale de la fuente hasta que alcanza un punto donde situamos un receptor. La **longitud de camino óptico** entre la fuente y el receptor, se define como el producto de la longitud de onda de la luz emitida por la fuente en el vacío, por la cantidad de longitudes de onda que caben entre la fuente y el receptor. Observe que la longitud de camino óptico no coincide necesariamente con la longitud del rayo que une la fuente con el receptor. En efecto, solo podremos decir que tales longitudes son iguales cuando el recorrido ocurre íntegramente en el vacío, sin reflexiones en interfaces. En lenguajes simplificados, suele referirse a la longitud de camino óptico como un número de longitudes de onda. Por ejemplo, dentro de tal medio el recorrido de la luz es de 4 longitudes de onda.

Analicemos ahora el caso en que la luz recorre varios medios separados por interfaces bien definidas. Supongamos que el rayo luminoso recorre N tramos de longitudes $l_1, l_2, ..., l_N$, donde los índices de refracción en cada medio son $n_1, n_2, ..., n_N$. La diferencia de fase en el recorrido del medio i-ésimo será

$$\Delta\phi_i = \frac{2\pi l_i}{\lambda_i} = \frac{2\pi l_i n_i}{\lambda_0} \tag{16.12}$$

donde λ_i es la longitud de onda en el tramo considerado. La diferencia de fase total en el recorrido será

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{N} l_i n_i \tag{16.13}$$

Los recorridos en cada medio podemos pensarlos como limitados entre dos interfaces en las cuales el rayo luminoso experimenta reflexiones o refracciones. En el caso en que el rayo haya experimentado alguna reflexión en el camino, la determinación de la longitud de camino requiere una corrección que se evalúa como sigue. Supongamos que la interfaz separa dos medios de índices de refracción n_a y n_b, siendo que la luz proviene del medio a. El rayo que se refleja volviendo al medio a llevará un incremento de fase de valor π, si n_a es menor que n_b. Note que este agregado de fase no corresponde para el caso en que n_a es mayor que n_b, ni para los casos de refracción cualquiera sea la relación de índices de refracción.

16.5. Interferencia por reflexión en láminas delgadas

Consideremos una lámina de caras paralelas, construida con un material transparente a la luz visible, cuyo índice de refracción es n. Supongamos que la lámina es iluminada con luz monocromática de longitud de onda λ_0, que incide perpendicularmente a una de las caras. Supongamos además que el espesor de la lámina es e, y su valor no supera unas pocas longitudes de onda de la luz utilizada. Analicemos lo que percibe un observador que recibe la luz emergente por reflexión. Los haces principales que observará son

- El haz reflejado hacia arriba en la primera superficie.
- El haz transmitido hacia abajo en la primera superficie, luego reflejado hacia arriba en la segunda superficie, y finalmente transmitido hacia arriba en la primera superficie.

Estos dos haces emergentes estarán en condiciones de interferencia si la diferencia de camino óptico entre ellos no supera la longitud de coherencia de la luz utilizada. Por esto es que hemos propuesto que el espesor de la lámina sea extremadamente pequeño (ver Figura 16.2).

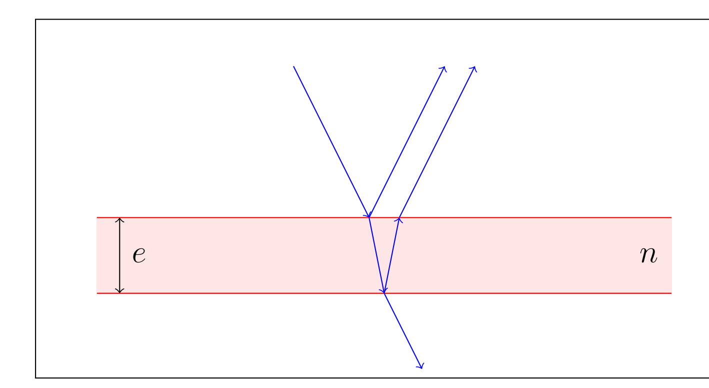


Figura 16.2: Esquema para analizar la interferencia por reflexión en láminas plano paralelas. Hemos recurrido al gráfico de rayos inclinados para diferenciarlos, no obstante el tratamiento hace referencia al caso de incidencia normal.

Calculemos ahora la diferencia de fase, en vistas a analizar la interferencia por reflexión. Para ello comencemos por reconocer que el segundo haz recorre un excedente de camino de longitud $2e$ respecto del primer haz. La cantidad de longitudes de onda que caben en este recorrido será $2e/\lambda$, donde λ es la longitud de onda en el material que forma la lámina. Recordemos brevemente la relación entre las longitudes de onda en el vacío y en el medio. Si v es la velocidad de la luz en el medio, tenemos que

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \tag{16.14}$$

de donde se tiene que

$$\lambda = \frac{v\lambda_0}{c} = \frac{\lambda_0}{n} \tag{16.15}$$

Volvamos a la cantidad de longitudes de onda que caben en el excedente de recorrido del segundo haz respecto del primero. Entonces tendremos

$$\frac{2e}{\lambda} = \frac{2en}{\lambda_0} \tag{16.16}$$

Para determinar la diferencia de fase total entre los dos haces, debemos observar los siguientes elementos

- La diferencia de camino aporta una diferencia de fase de 2π por cada longitud de onda comprendida en dicho camino.
- La reflexión del primer haz ocurre de modo que el medio de procedencia tiene un índice de refracción menor que el medio de transmisión. Entonces corresponde computar un agregado de π a la diferencia de fase total.

Entonces la diferencia de fase total será

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{2en}{\lambda_0} + \pi \tag{16.17}$$

Esta relación nos permite analizar condiciones para tener interferencia constructiva o destructiva. Esto es

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2\pi \frac{2en}{\lambda_0} + \pi = 2k\pi & \textbf{Interferencia constructiva} \\ \Delta\phi &= 2\pi \frac{2en}{\lambda_0} + \pi = (2k+1)\pi & \textbf{Interferencia destructiva} \end{aligned} \tag{16.18}$$

Reorganizando las expresiones tenemos

$$\begin{aligned} 4en &= (2k-1)\lambda_0 & \textbf{Interferencia constructiva} \\ 4en &= 2k\lambda_0 & \textbf{Interferencia destructiva} \end{aligned} \tag{16.19}$$

donde k toma valores naturales no nulos. Estas últimas expresiones nos indican que para ciertos valores de longitud de onda λ_0 la interferencia de los dos primeros haces emergentes por reflexión podrá ser constructiva o destructiva según cumplan con la primera o segunda expresión. Tecnológicamente resulta muy difícil desarrollar láminas tan delgadas para lograr esta interferencia. Esto se debe a la longitud de coherencia extremadamente corta de la luz natural. Sin embargo, resulta viable la deposición de una lámina delgada sobre algún soporte mecánico suficientemente estable. Por ejemplo, sobre un vidrio mecánicamente estable se puede depositar una fina lámina de otro vidrio con índice de refracción diferente, cuyo espesor sea bastante menor que la longitud de coherencia de la luz visible. En estas condiciones es posible elegir un espesor tal que la luz de cierta longitud de onda se intensifique. Así se construyen los vidrios reflectantes (o espejados) muy utilizados en arquitectura o en anteojos de diseño. También es posible conseguir láminas antireflectantes. Consideremos una pintura (valiosa) protegida por un vidrio e iluminada por una lámpara. Resulta bastante molesta para el observador la luz reflejada en el vidrio. Una solución para este problema, consiste en depositar una lámina muy delgada de otro vidrio sobre el primero calculada de modo que la longitud de onda de máxima intensidad que emite la lámpara esté en condiciones de interferencia destructiva por reflexión en la lámina agregada. Así, la mayor parte de la luz reflejada es eliminada.

16.6. Interferencia entre N antenas alineadas

Consideremos un arreglo lineal de N antenas equidistantes que emiten ondas armónicas idénticas (de igual amplitud y frecuencia ω), todas ellas en fase y generando frentes cilíndricos. Supongamos que las antenas las modelamos como segmentos paralelos al eje z con sus puntos medios sobre el eje y. En consecuencia, el campo eléctrico de todas las ondas estará polarizado en la dirección del eje z. Supongamos además que el origen de coordenadas está en el centro del arreglo y el eje x corre perpendicular al plano de las antenas. Sea d la distancia entre dos antenas sucesivas y a la distancia entre la primera y la última antena del arreglo (ver Figura 16.3).

Supongamos ahora que un observador muy lejano situado en un punto del plano $x-y$, recibe simultáneamente todas las emisiones. Él las observará como ondas planas de igual amplitud, debido a la gran distancia, aunque notará una fase relativa diferente para cada onda. Sea $\vec{E}_0$ la amplitud de cada onda vista por el observador, $\vec{k}$ el vector de onda común a todas ellas y ϕ_i la fase relativa de la i-ésima onda. Entonces el campo eléctrico total visto por el observador será

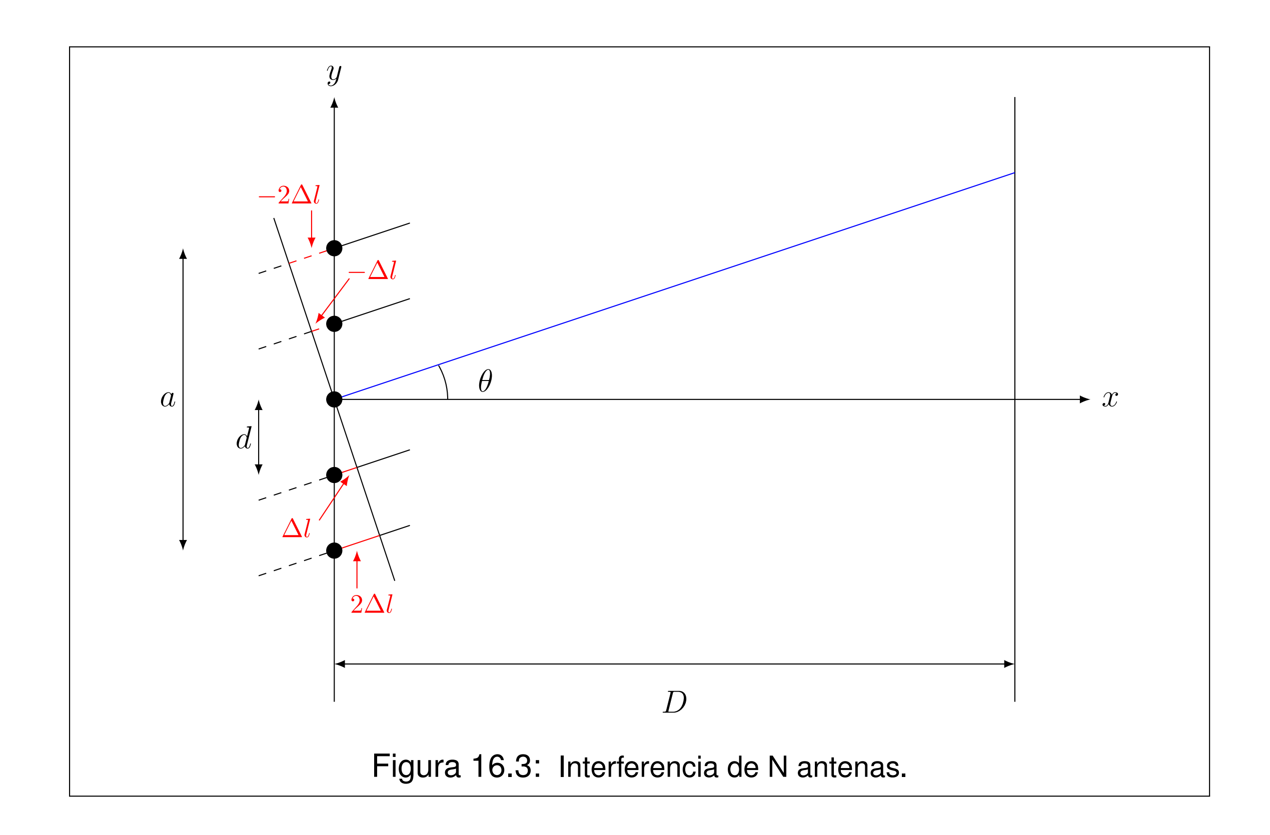


Figura 16.3: Interferencia de N antenas.

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_0 \,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi_i\right) \tag{16.20}$$

Eligiendo adecuadamente el origen de tiempos, las fases relativas pueden escribirse como sigue

$$\begin{aligned}\phi_i &= \left(-\frac{N+1}{2}+i\right)\frac{2\pi}{\lambda}\,d\,\sin\theta \\ \Delta\phi &= \phi_i-\phi_{i-1} = \frac{2\pi d\,\sin\theta}{\lambda}\end{aligned} \tag{16.21}$$

donde $\Delta\phi$ es la diferencia de fase observada entre las emisiones de dos antenas contiguas. Para simplificar el análisis que sigue, introducimos la variable auxiliar u que se define como

$$u \;=\; \vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t \tag{16.22}$$

Reemplazando en la expresión del campo observado, tenemos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sum_{i=1}^{N} \sin(u+\phi_i) \tag{16.23}$$

Desarrollemos esta expresión utilizando la identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sum_{i=1}^{N} (\sin u \cos\phi_i + \cos u \sin\phi_i) \tag{16.24}$$

Distribuyendo la sumatoria, y observando que la variable u no contiene al índice i, tenemos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin u \sum_{i=1}^{N} \cos\phi_i + \vec{E}_0 \cos u \sum_{i=1}^{N} \sin\phi_i \tag{16.25}$$

En este punto, conviene introducir un tratamiento fasorial similar al que utilizamos en circuitos de corriente alterna.

Supongamos que las fases de la sumatoria de (16.23) se corresponden con los ángulos subtendidos por N fasores unitarios. Eligiendo el origen de tiempos adecuadamente, podemos hacer que en la posición del observador, la variable u se haga circunstancialmente nula. Entonces el diagrama fasorial tendrá la forma indicada en la Figura 16.4.

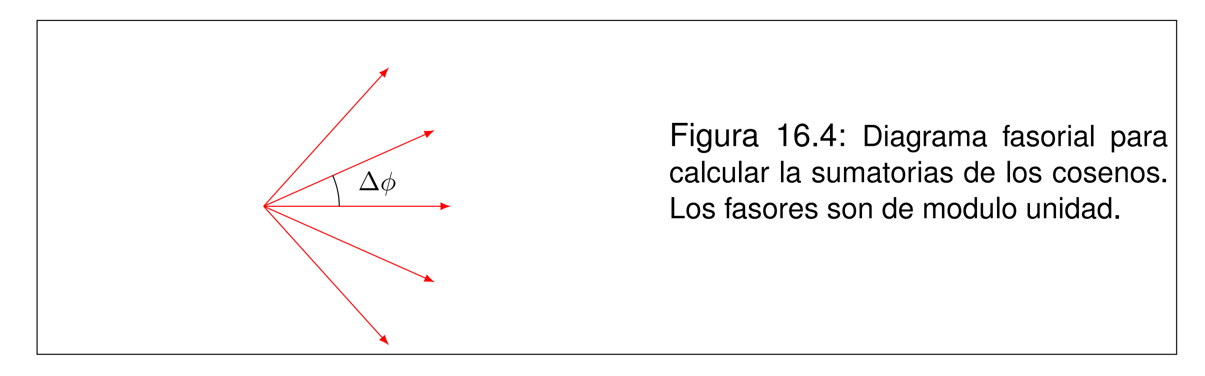


Figura 16.4: Diagrama fasorial para calcular la sumatorias de los cosenos. Los fasores son de modulo unidad.

Recordando la representación del seno y el coseno en una circunferencia trigonométrica, y observando la simetría del dibujo, es fácil reconocer que la sumatoria de los senos es nula. Por tanto la expresión anterior toma la forma simplificada siguiente

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \sin u \sum_{i=1}^{N} \cos(\phi_i) \quad (16.26)$$

Ahora nuestro esquema fasorial constituye la herramienta para calcular la sumatoria de los cosenos. Para ello recordemos el método poligonal para la suma de vectores. Este consiste en dibujar una secuencia que contenga todos los vectores a sumar, colocando uno a continuación del otro con sus respectivas longitudes y orientaciones. Luego, el vector resultante será el que une los extremos de la secuencia. En nuestro caso, el conjunto de vectores da lugar a la secuencia de la Figura 16.5.

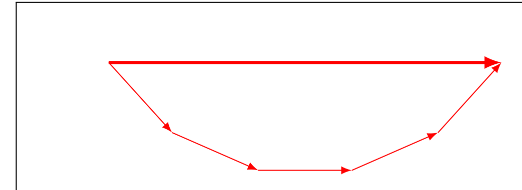


Figura 16.5: Esquema para sumar los fasores mediante el método poligonal. Observe que la resultante representa la suma de los cosenos buscada.

La alta simetría de los fasores involucrados, hace que los vértices de la curva poligonal puedan circunscribirse por una circunferencia de radio R (en principio, desconocido). Por otra parte, pensando que el coseno es la proyección horizontal de cada vector unitario, podemos reconocer que la sumatoria buscada coincide con la longitud del vector resultante.

Trabajemos ahora con la geometría de la Figura 16.6. Comencemos por reconocer el triángulo isósceles ACD, con dos lados de longitud R y el tercero de longitud unidad. Observando los ángulos indicados en la Figura alrededor del punto D tenemos que $2\gamma + \Delta\phi = \pi$, entonces, en el triángulo mencionado podemos concluir que el ángulo opuesto al lado unitario mide $\Delta\phi$. Aplicando el teorema del coseno tenemos

$$R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(\Delta\phi) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2R^2 \left[1 - \cos(\Delta\phi)\right] = 1 \quad (16.27)$$

Trabajando con identidades trigonométricas elementales obtenemos

$$4R^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 2R \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad (16.28)$$

Ahora analizamos el triángulo isósceles ABE, con dos lados de longitud R y el otro igual a la sumatoria de los cosenos. Observemos que el ángulo opuesto

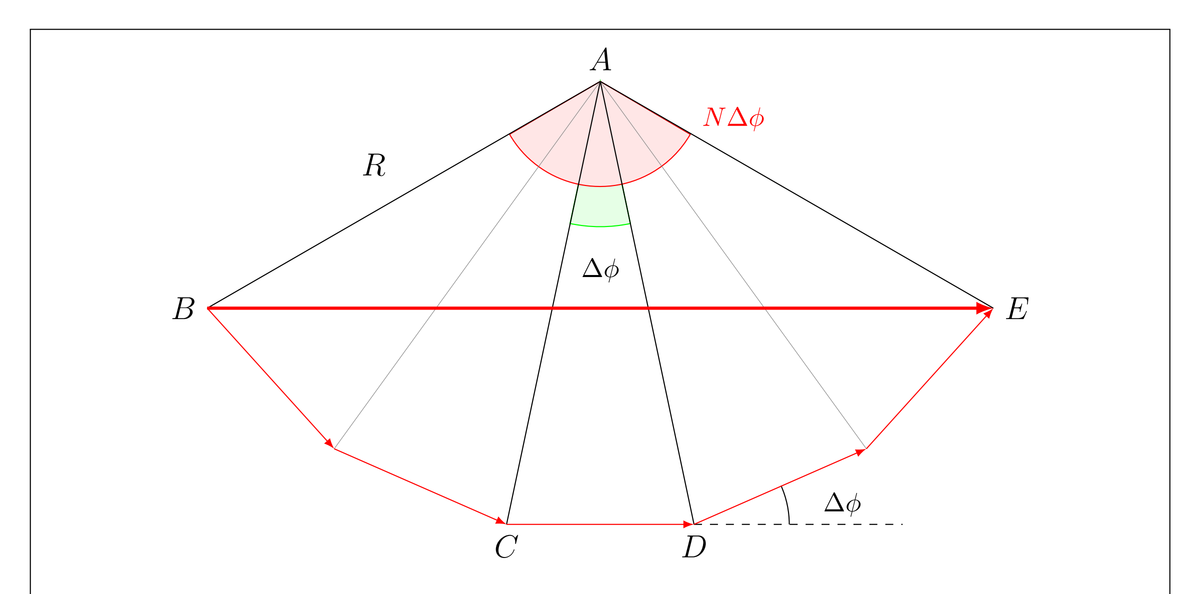


Figura 16.6: Esquema de la geometría construida para establecer el valor de la suma de los cosenos.

al lado desigual vale $N\,\Delta\phi$ como se indica en la Figura 16.6. Luego, aplicando el teorema del coseno al triángulo ABE y siguiendo el mismo procedimiento realizado con el triángulo ACD tenemos

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(\phi_i) \;=\; 2R\,\sin\left(\frac{N\,\Delta\phi}{2}\right) \tag{16.29}$$

Haciendo el cociente entre las expresiones (16.29) y (16.28) eliminamos el parámetro desconocido R. Así obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N} \cos(\phi_i) \;=\; \frac{\sin\left(\dfrac{N\,\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\Delta\phi}{2}\right)} \tag{16.30}$$

Con el objeto de simplificar notaciones, introducimos un nuevo parámetro α

$$\alpha \;=\; \frac{\Delta\phi}{2} \;=\; \frac{\pi d\,\sin\theta}{\lambda} \tag{16.31}$$

Reemplazando en (16.26) obtenemos

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) \;=\; \vec{E}_0\,\sin u\,\frac{\sin\,(N\,\alpha)}{\sin\,(\alpha)} \tag{16.32}$$

Aquí reconocemos que el observador recibe una onda de características análogas a las que emite cada antena, pero la amplitud está condicionada por la múltiple interferencia. En la expresión siguiente indicamos entre corchetes dicha amplitud

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) \;=\; \left[\vec{E}_0\,\frac{\sin\,(N\,\alpha)}{\sin\,(\alpha)}\right]\;\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right) \tag{16.33}$$

Definimos por $\vec{E}^{*}$ al vector amplitud resultante. El factor de modulación de la amplitud que depende de la posición del observador se define como sigue

$$\frac{E^{*}}{E_0} \;=\; \frac{\sin\,(N\,\alpha)}{\sin\,(\alpha)} \tag{16.34}$$

Recordando que la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, podemos escribir su valor relativo de la siguiente forma

$$\frac{I}{I_0} \;=\; \left(\frac{\sin\,(N\,\alpha)}{\sin\,(\alpha)}\right)^2 \tag{16.35}$$

Veamos lo que ocurre para $N=2$

$$\frac{I}{I_0} \;=\; \left[\frac{\sin\,(2\,\alpha)}{\sin\,(\alpha)}\right]^2 = \left[\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]^2 = 4\cos^2\alpha \tag{16.36}$$

En la Figura 16.7 se grafica el comportamiento de la intensidad relativa como función de la variable α.

16.7. El concepto de difracción

Cuenta la leyenda que en un viejo puerto de la Isla de Rodas, fue erigida la más imponente estatua de la Antiguedad: **el Coloso de Rodas**. Era un dios de bronce de 36 metros de altura, que custodiaba la entrada del puerto con sus

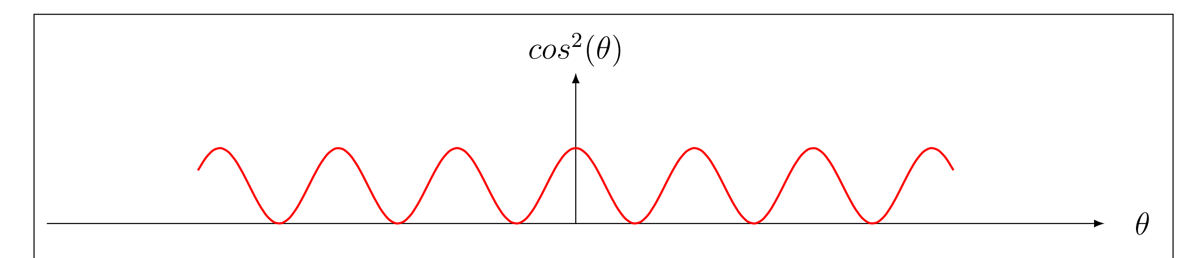


Figura 16.7: Gráfico de la intensidad relativa como función de la variable α para un sistema de dos antenas.

pies apoyados sobre dos escolleras. Como el Coloso miraba hacia afuera, estaría familiarizado con el oleaje del mar abierto que llegaba hasta sus pies. Lo que seguramente no pudo ver es el extraño fenómeno que las olas producían a sus espaldas. Como no tenemos imágenes que documenten aquel escenario del año 280 antes de Cristo, recurrimos al arte para reconstruir lo que pasaba (Figura 16.9). En primer lugar, observemos que las olas exteriores presentan frentes rectos. Luego chocan contra las escolleras, excepto en la abertura de la entrada del puerto. El oleaje que logra ingresar, presenta frentes lateralmente curvados. A esta conducta de los frentes de onda surgida a partir de la interposición de un obstáculo, en este caso las escolleras, se la conoce como **difracción**. Así, decimos que las olas son difractadas en la parte interna del puerto, al atravesar la abertura formada entre las dos escolleras.

Para fijar ideas, comparemos el fenómeno observado a espaldas del Coloso, con la expectativa que podríamos tener si las olas se comportaran como en la óptica geométrica. En la Figura 16.8 representamos un esquema de rayos que, por supuesto, van perpendiculares a los frentes de onda.

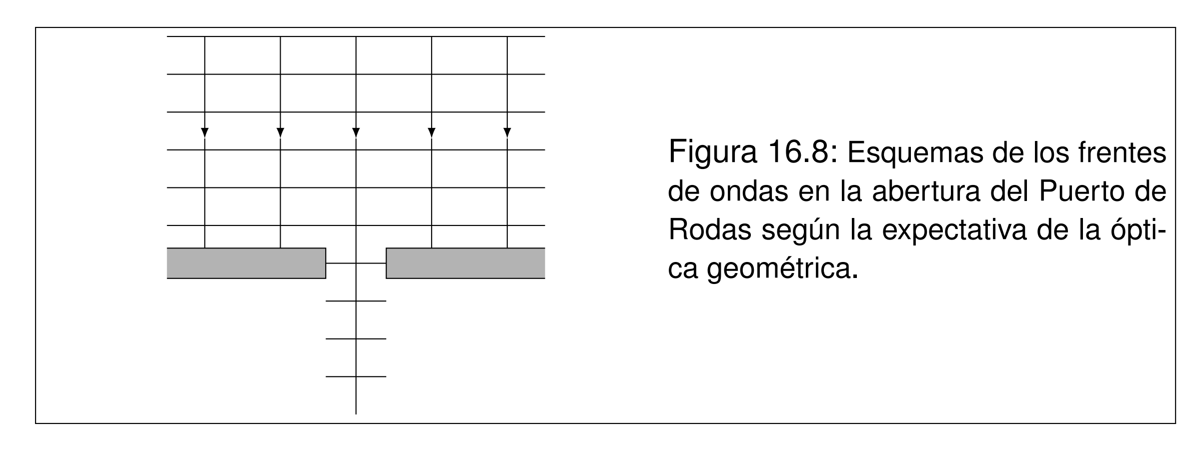


Figura 16.8: Esquemas de los frentes de ondas en la abertura del Puerto de Rodas según la expectativa de la óptica geométrica.

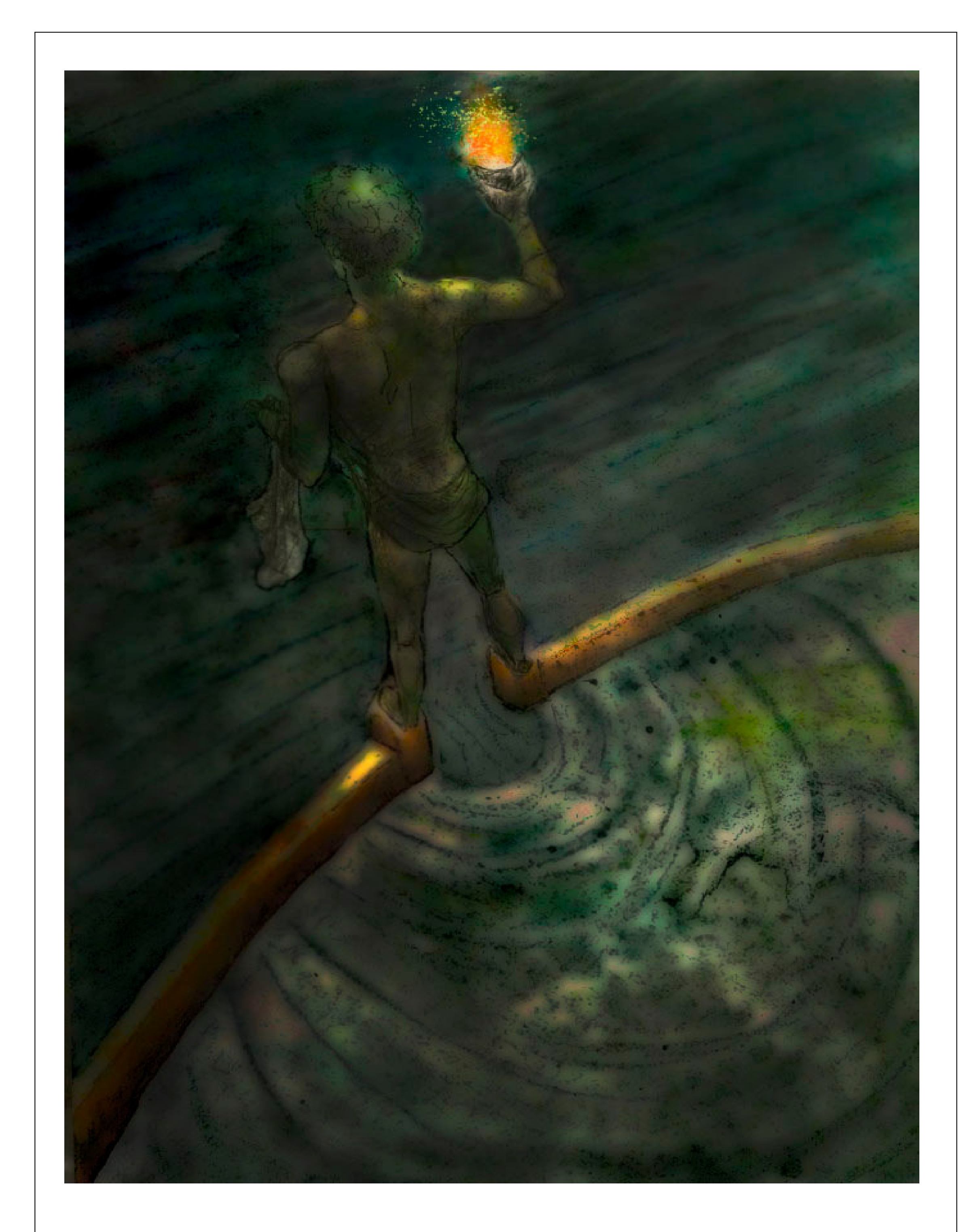


Figura 16.9: Coloso de Rodas. Oleo de Cecilia Paola.

Lo que nos indica la óptica geométrica, es que los rayos que pasan por la abertura siguen sin desviación. Por su parte, los rayos restantes quedan impedidos de pasar cuando las olas alcanzan las escolleras. En la Figura 16.10 representamos los frentes de onda como verdaderamente se los observa en el Puerto de Rodas. El lector podrá advertir que el efecto de difracción constituye una anomalía respecto de lo que podría esperarse con un abordaje estrictamente geométrico de las ondas.

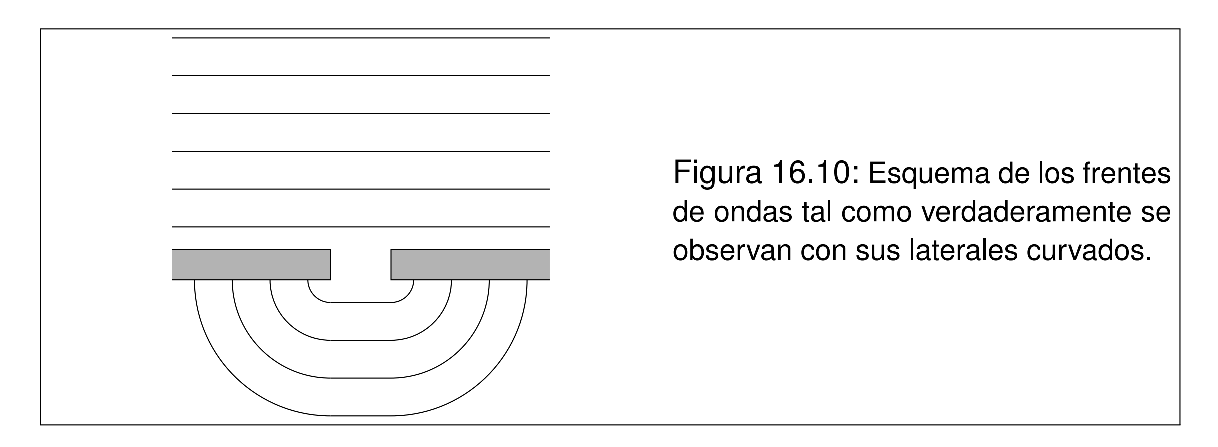


Figura 16.10: Esquema de los frentes de ondas tal como verdaderamente se observan con sus laterales curvados.

Tal vez resulte extraño que hayamos elegido hablar de difracción con olas, y no con ondas luminosas. Aquí cabe preguntarse si la luz del Sol al entrar por una ventana no tendría una conducta análoga. En este punto, es necesario profundizar sobre las similitudes y diferencias. En primer lugar, observemos que en ambos casos se trata de ondas que pasan por una abertura. Sin embargo, las olas tienen una longitud de onda comparable con el tamaño de la entrada del puerto, mientras que la luz tiene longitudes de onda cuyo orden de magnitud es seis veces menor que el ancho de la ventana. Esta diferencia parece ser crucial, por lo que la difracción de la luz no se observa cuando la misma atraviesa ventanas. Esto justifica bastante bien que hayamos elegido las olas para introducir el fenómeno, a la vez que nos da la primera pista para pensar cómo observar difracción de ondas luminosas. La analogía es inmediata. La difracción de la luz puede observarse cuando la misma atraviesa una ranura de ancho comparable con su longitud de onda.

16.8. Principio de Huygens

La más antigua de las interpretaciones acerca de la difracción de ondas la constituye el **Principio de Hugens**. El mismo consiste en suponer que cada punto de un frente de onda se comporta como un emisor puntual sincronizado con la onda. Para fijar ideas, supongamos que una ola presenta un frente de

onda recto, que al tiempo $t = 0$ coincide con el eje y. Si la ola viaja en el sentido positivo del eje x, imaginemos que de cada punto del frente se propaga una onda de frentes semicirculares hacia la derecha. La evolvente de todos estos frentes constituye nuevamente un frente recto. Ahora, siguiendo esta idea nos preguntamos qué ocurriría si la ola se encuentra con las escolleras del Puerto de Rodas. La evolvente de los frentes emergentes tendría límites laterales curvos. Esta idea, por cierto muy elemental, puede tomarse como punto de partida para el estudio de la difracción. En primer lugar, da una buena representación de la forma de los frentes de onda. Pero un análisis más profundo nos induce a pensar que si cada punto del frente de onda es un emisor elemental, la onda resultante debe ser considerada como un fenómeno de interferencia múltiple. En tal sentido, una manera de corroborar la veracidad de la idea de Huygens consiste en evaluar experimentalmente si tal interferencia se observa. Hoy estamos en condiciones de asegurar que esto es así, por lo que un tratamiento interferencial de la difracción nos permite modelar los fenómenos observados.

Es importante que el lector no considere a la difracción como un fenómeno de interferencia. Esto suele ser una desviación conceptual que surge de considerar al fenómeno en términos de la herramienta que permite su descripción. Aquí queremos remarcar que la difracción ocurre como consecuencia del encuentro de un frente de onda con los obstáculos que impiden su propagación. Nótese que el Principio de Huygens pone de manifiesto cuestiones que permiten la comprensión de la difracción, pero sigue siendo válido en cualquier contexto de propagación de ondas libre de obstáculos.

16.9. Difracción de Fresnel y difracción de Fraunhofer

Para fijar ideas sobre la difracción de la luz conviene imaginar un montaje en que ella pase a través de alguna abertura cuyas dimensiones resulten del orden de su longitud de onda. Luego, la luz emergente puede ser proyectada sobre una pantalla dando lugar a lo que llamaremos **imagen de difracción** asociada a la abertura. En este punto, podemos reconocer dos límites cuyos abordajes matemáticos resultan muy diferentes. Estos son:

Difracción de Fresnel: Es la imagen de difracción que se observa sobre la pantalla cuando la distancia entre ella y la abertura es pequeña. El abordaje matemático de este fenómeno requiere herramientas bastante especiales que no manejamos en este curso. Sin embargo, algunos tratamientos elementales existen para el caso de aberturas circulares observadas desde el punto central de la imagen de difracción. Nosotros no abordaremos esta resolución.

Difracción de Fraunhofer: Este es el caso en que la pantalla se encuentra muy lejos de la abertura (formalmente en el infinito). Naturalmente, no sería posible la observación de la imagen en tal pantalla reconociendo la baja intensidad de la luz que la alcanzaría. Este escollo puede resolverse experimentalmente colocando una lente convergente entre la abertura y la pantalla. Luego, la imagen puede observarse con la pantalla situada en el foco imagen de la lente.

16.10. Difracción de Fraunhofer por una ranura

Como ejemplo para analizar la difracción de Fraunhofer, consideremos una ranura cuyo ancho a es comparable con la longitud de onda de la luz que la atraviesa. Si la ranura es suficientemente larga podemos pensar que en cualquier plano perpendicular a la misma, la luz se propagará con idéntica geometría (condición de simetría). Así podemos reducir el análisis a un tratamiento bidimensional[2]. Siguiendo la idea de Huygens podríamos imaginar que cada punto de un frente de ondas que se encuentra justo en la ranura resulta un emisor de ondas secundarias. Ahora bien, en la sección 6 hemos tratado la interferencia de N antenas alineadas. Este arreglo se parece mucho al de los emisores alineados en el frente de onda que pasa por la ranura. La diferencia está en que el número de emisores en el problema de difracción tiende a infinito. Parece natural entonces pensar que la difracción por una ranura puede obtenerse como el límite del problema de N antenas alineadas. Analicemos cuidadosamente este límite. Para ello recordemos las relaciones (16.31) y (16.33)

$$\vec{E}\left(\vec{r},t\right) \;=\; \left[\vec{E}_0\,\frac{\sin\left(N\,\alpha\right)}{\sin\left(\alpha\right)}\right]\;\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right), \quad \text{con} \quad \alpha=\frac{\pi d\,\sin\theta}{\lambda} \qquad (16.37)$$

Ahora observemos en primer lugar que el número de antenas N tiende a infinito, a la vez que la distancia d entre ellas tiende a cero. Para ser consistente con el tamaño de la ranura observemos que el producto Nd tiene que ser constante y tomar el valor a. Asimismo, observemos que el producto NE_0 debe tender al módulo del campo E^* observado en el centro de la imagen. Resumiendo, tenemos

$$\begin{array}{lll} N\to\infty, & d\to 0\,, & Nd=a \\ N\to\infty, & E_0\to 0\,, & NE_0=E^* \end{array} \qquad (16.38)$$

[2]En estas condiciones, la luz y la ranura resultan análogas a las olas y la entrada del Puerto de Rodas.

Ahora nos disponemos a desarrollar el límite en dos etapas. En la primera etapa supongamos que N se hizo muy grande (pero no infinito) a la vez que d se hizo muy pequeño (pero no nulo). Entonces, observemos que α se habrá hecho muy pequeño siguiendo la conducta de d, por lo que cabe aproximar

$$\sin(\alpha) \cong \alpha \tag{16.39}$$

Reemplazando en la expresión (16.37)

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) \;\cong\; \left[\vec{E}_0\,\frac{\sin\,(N\,\alpha)}{\alpha}\right]\,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right) \tag{16.40}$$

Ahora reemplazamos el valor de α y multiplicamos numerador y denominador por N

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) \;\cong\; \left[\vec{E}_0 N\,\frac{\sin\left(N\,\dfrac{\pi d\,\sin\theta}{\lambda}\right)}{N\dfrac{\pi d\,\sin\theta}{\lambda}}\right]\,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right) \tag{16.41}$$

Aquí estamos en condiciones de tomar el límite definitivo. Para ello observemos las expresiones (16.38) que reemplazadas en (16.41) nos dan la forma final

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) \;\cong\; \left[\vec{E}^*\frac{\sin\left(\dfrac{\pi a\,\sin\theta}{\lambda}\right)}{\dfrac{\pi a\,\sin\theta}{\lambda}}\right]\,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right) \tag{16.42}$$

Con el fin de compactar la última expresión, definimos el parámetro β como sigue

$$\beta = \frac{\pi a\,\sin\theta}{\lambda} \tag{16.43}$$

Con lo que $\vec{E}$ toma la forma

$$\vec{E}\,(\vec{r},t) \;\cong\; \left[\vec{E}^*\frac{\sin\beta}{\beta}\right]\,\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right) \tag{16.44}$$

Retomemos aquí el concepto de intensidad de una onda electromagnética armónica. Recordando que la misma coincide con el valor medio temporal del vector de Poynting, tenemos que la emisión de luz difractada en un ángulo θ tendrá una

intensidad dada por

$$I(\theta) \;=\; \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,c\,E^{*2}\,\frac{\sin^2\beta(\theta)}{\beta^2(\theta)} \tag{16.45}$$

En particular, si llamamos E_0 a la intensidad de la emisión en $\theta = 0$, tenemos el siguiente límite

$$I_0 = I(0) \;=\; \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,c\,E^{*2} \tag{16.46}$$

Ahora estamos en condiciones de definir la intensidad relativa I/I_0. Esto es

$$\frac{I(\theta)}{I_0} \;=\; \frac{\sin^2\beta(\theta)}{\beta^2(\theta)} \tag{16.47}$$

Esta expresión describe la imagen de difracción de una ranura que se puede observar con una pantalla situada en el foco de una lente convergente que toma la luz que emerge de la ranura. En esta imagen se puede observar un diagrama de franja donde predomina una franja ancha y muy intensa en el centro de la imagen. Luego aparecen dos mínimos simétricos de intensidad nula confinando la franja central, seguidos a ambos lados por franjas brillantes de menor intensidad también simétricas. En experimentos muy cuidadosos pueden observarse sucesiones simétricas de franjas cada vez menos intensas limitadas por mínimos de intensidad nula (Ver Figura 16.11).

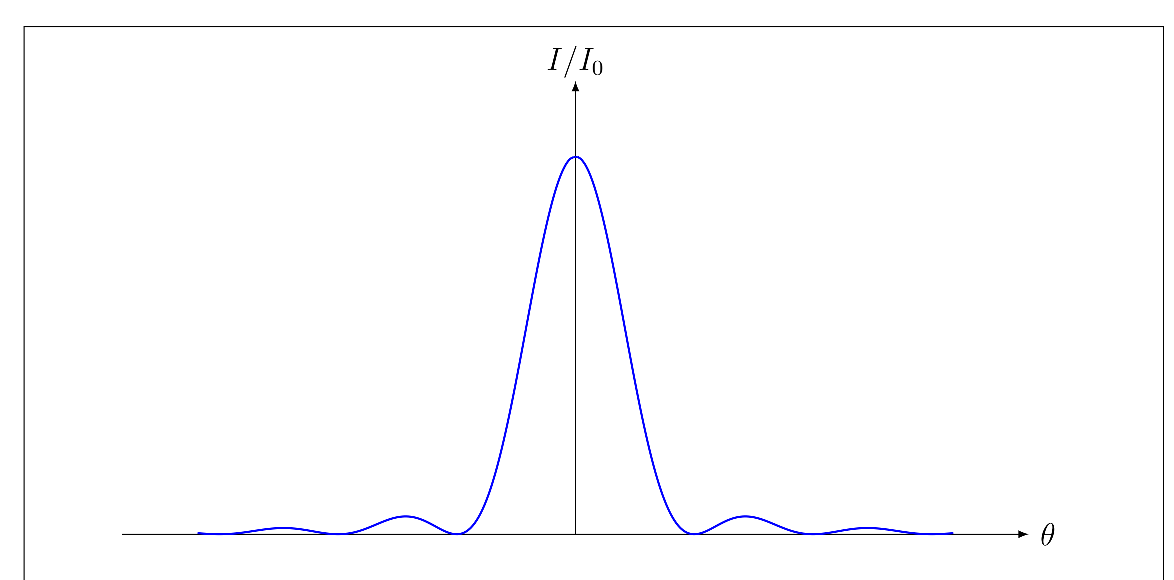


Figura 16.11: Esquema de la intensidad relativa observada por difracción de Fraunhofer a través de una única ranura.

16.11. Difracción de Fraunhofer por un sistema de ranuras

Con tratamientos similares a los utilizados en la sección anterior podemos desarrollar las imágenes de difracción que surgen de un sistema de N ranuras, cada una de las cuales es de ancho a, y se encuentran equiespaciadas con una distancia d entre sus centros (ver Figura 16.12).

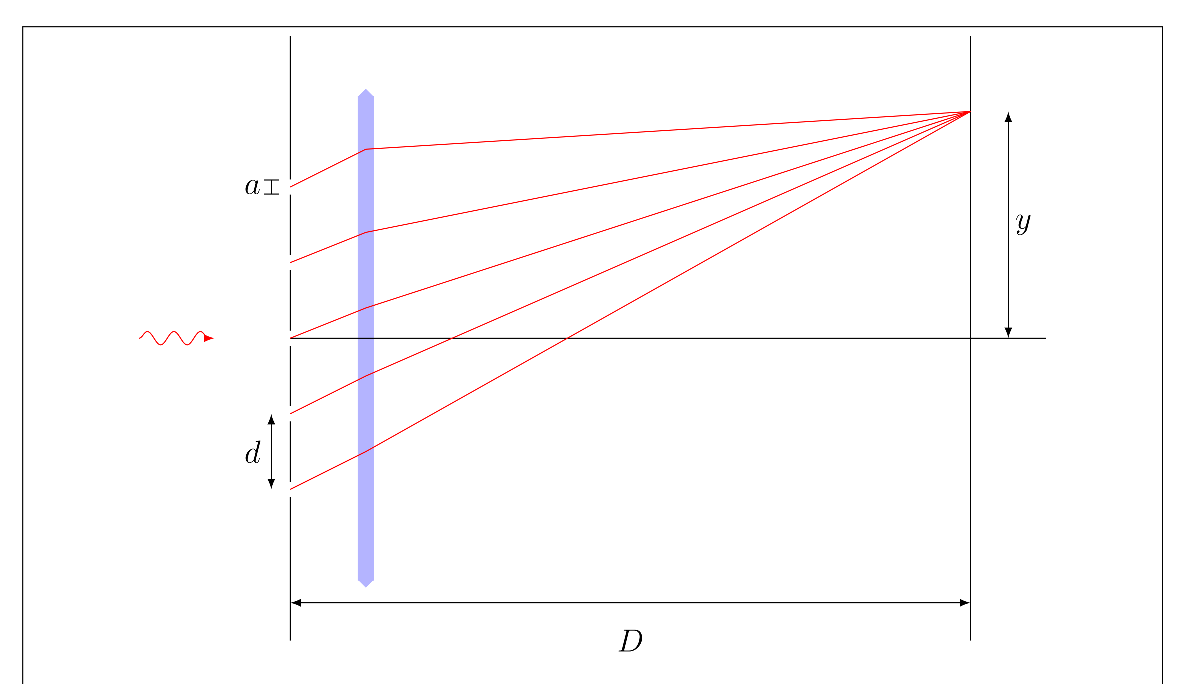


Figura 16.12: Esquema para representar la geometría involucrada en la difracción de Fraunhofer a través de un sistema de ranuras.

Nosotros no presentaremos aquí la deducción sino que simplemente escribiremos el resultado para luego analizar las características de la imagen de difracción. La expresión general que describe la intensidad relativa como función del ángulo θ viene dada por

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left\{\frac{\sin\beta(\theta)}{\beta(\theta)}\right\}^2 \left\{\frac{\sin[N\alpha(\theta)]}{\sin[\alpha(\theta)]}\right\}^2 \tag{16.48}$$

donde α y β están dadas por las siguientes expresiones

$$\alpha = \frac{\pi d\,\sin\theta}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi a\,\sin\theta}{\lambda} \tag{16.49}$$

El caso más sencillo no trivial lo constituye el sistema de dos ranuras ($N = 2$), ambas de ancho a separadas una distancia d entre centros (naturalmente debe cumplirse $d > a$). Observemos que el segundo factor de (16.48) puede trabajarse de la siguiente manera

$$\frac{\sin(N\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha \tag{16.50}$$

con lo que tenemos que la intensidad puede escribirse como sigue

$$I(\theta) = 4I_0 \left\{\frac{\sin\beta(\theta)}{\beta(\theta)}\right\}^2 \cos^2\alpha(\theta) \tag{16.51}$$

Para analizar esta expresión imaginemos en primer lugar que el montaje tiene una única ranura, y que luego se agrega una segunda ranura. Cuando el montaje tiene una sola ranura la expresión que describe la imagen de difracción es la (16.47), que levemente modificada es

$$I(\theta) = I_0 \left\{\frac{\sin\beta(\theta)}{\beta(\theta)}\right\}^2 \tag{16.52}$$

Cuando agregamos la segunda ranura aparecen dos nuevos factores. En primer lugar observemos el $\cos^2\alpha$. Este factor constituye una función periódica que quedará modulada por la función que describe la difracción de una ranura (ver Figura 16.13). Luego, el factor 4, da cuenta de una intensificación general sobre toda la imagen. En cierto modo, podríamos decir que este montaje superpone una imagen de interferencia (factor $\cos^2\alpha$) modulada por una imagen de difracción por una ranura (factor $\sin^2\beta/\beta^2$). Es en este sentido que muchos autores denominan a estos factores simplemente como **factor de interferencia** y **factor de difracción**, respectivamente.

Observe el lector que si el ancho a de las ranuras se hace más y más pequeño, el máximo central de difracción se extiende abarcando cada vez más períodos de la función $\sin^2\alpha$. Cuando esto es así, la imagen coincide con la que se obtiene por interferencia de dos fuentes puntuales[3].

16.12. Redes de Difracción

Un caso de gran interés científico y tecnológico en relación con la difracción por N ranuras, lo constituye el caso en que N se hace bastante grande. Siendo

[3]Para reproducir este resultado, analice el problema de N antenas alineadas eligiendo $N = 2$. Este montaje llevado al caso óptico se conoce como experimento de Young, que resulta de hacer que las dos ranuras sean extremadamente angostas.

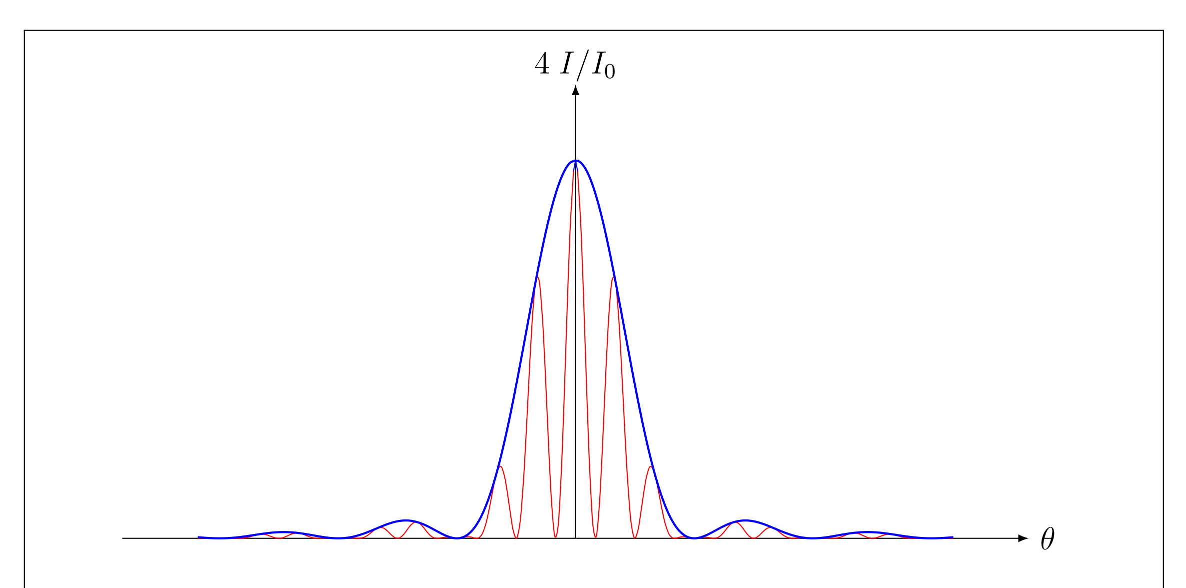


Figura 16.13: Esquema de la intensidad relativa observada por difracción de Fraunhofer a través de dos ranuras.

que a y d ($a < d$) se mantienen del orden de la longitud de onda de la luz visible, un valor significativo para el número de ranuras N podría ser de algunos centenares. Este tipo de montaje se conoce como **red de difracción**. Por ejemplo, una red de 200 ranuras por milímetro tendrá una distancia entre centros de ranuras contiguas $d = 5 \times 10^{-3}$ mm $= 5000$ nm. A su vez, las ranuras tendrán un ancho que puede ser significativamente menor que la distancia entre sus centros. Por ejemplo, $a = 1000$ nm o menos.

Veamos ahora lo que ocurre con la expresión (16.48). En primer lugar, observemos que el factor de difracción genera una evolvente muy extendida en tanto el valor de a se hace más y más pequeño. Entonces, el factor de interferencia toma una importancia crucial. Para analizarlo, observemos los máximos más relevantes que presenta esta función, los cuales ocurren periódicamente en los puntos donde se anula $\sin\alpha$ (**máximos principales**)[4]. Como el factor de interferencia se indetermina, debemos resolver el límite. Comencemos por reconocer que $\sin\alpha$ se anula en los siguientes valores

$$\alpha = \pm k\pi \qquad \text{donde} \quad k = 0, 1, 2... \tag{16.53}$$

Observando que el factor de interferencia es periódico respecto de la variable α, resolvemos el límite para $k = 0$ y asumimos que los máximos principales presen-

[4]Un análisis cuidadoso muestra que el factor de interferencia tiene muchos máximos que nosotros no estamos considerando. Sin embargo, los que ocurren en puntos donde $\sin\alpha \neq 0$ tienen una altura mucho menor que los que ocurren donde $\sin\alpha = 0$. En tal sentido, a los de altura menor se los llama **máximos secundarios** y nosotros omitiremos su análisis en este texto.

tan el mismo aspecto funcional para todos los valores enteros de k. Veamos este límite

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)}\right\}^2 = \lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{N\alpha\sin(N\alpha)}{N\alpha\sin(\alpha)}\right\}^2 = \tag{16.54}$$

$$= N^2\left\{\frac{\lim_{\alpha\to 0}\sin(N\alpha)}{\lim_{\alpha\to 0}\sin(\alpha)}\right\}^2 = N^2 \tag{16.55}$$

Con este resultado podemos concluir que la intensidad en los máximos principales producidos por la red de difracción viene dada por

$$I(\alpha = \pm k\pi) = N^2 I_0 \tag{16.56}$$

Aquí observamos que los máximos principales presentan un enorme incremento de la intensidad en relación con la que produciría una ranura única en el centro del esquema de difracción. Esto va acompañado de un estrechamiento alrededor del máximo, que lo convierte en un pico muy agudo de ancho tanto menor cuanto mayor es el valor de N. Ahora podríamos preguntarnos acerca del aspecto de la imagen de difracción producida por la red. Si el haz de luz es monocromático, aparecerá una secuencia de líneas angostas y muy brillantes separadas en ángulos relativamente grandes, y simétricas alrededor de una línea central. Los ángulos en los que aparecerán estas líneas los indicaremos por $\theta_{\pm k}$ y pueden calcularse a partir de la expresión (16.49) que define la variable α. De allí tenemos

$$\pm k\pi = \frac{\pi d\,\sin\theta_{\pm k}}{\lambda} \quad\Longrightarrow\quad \theta_{\pm k} = \arcsin\left(\frac{\pm k\lambda}{d}\right) \tag{16.57}$$

Esta última expresión constituye la base de una técnica muy difundida llamada **espectroscopía**, y las redes de difracción son el recurso tecnológico para el desarrollo de dicha técnica. Analicemos brevemente de qué se trata la espectroscopía. Supongamos que un haz de luz proveniente de una fuente desconocida no monocromática se hace incidir sobre una red de difracción. Supongamos ahora que analizamos la desviación de la luz para $k = 1$, entendiendo que el haz está compuesto por una superposición de haces monocromáticos de distintas longitudes de onda. Dependiendo de la longitud de onda λ, el ángulo θ_1 tomará distintos valores según indica la ecuación (16.57). Si ahora intercalamos una pantalla en el camino de los haces difractados, observaremos un espectro en el que se discriminan las diferentes longitudes de onda mediante una separación angular. A

este esquema se lo denomina **espectro de primer orden asociado a la red de difracción**. Los espectros de segundo orden, tercer orden, etc., se obtienen eligiendo $k = 2$, $k = 3$, etc., respectivamente.

La calidad de una red de difracción será tanto mayor cuanto más precisos resulten los espectros que ella produce. En la práctica, esta calidad se obtiene aumentando la cantidad de ranuras por milímetro, que influye en que las líneas provenientes de componentes monocromáticas sean más intensas y más estrechas. Esto puede cuantificarse mediante un criterio de calidad conocido como **poder de resolución de la red**, cuyo tratamiento no abordaremos aquí.

16.13. Problemas

1. Una delgada lámina de vidrio de índice de refracción $n = 1.5$, es iluminada con luz monocromática y observada por reflexión (incidencia normal). Las reflexiones intensificadas por interferencia constructiva dentro del rango visible ocurren exclusivamente para las longitudes de onda $\lambda_a = 440$ nm y $\lambda_b = 565.7$ nm (entendemos por rango visible a las longitudes de onda del intervalo comprendido entre 400 nm y 700 nm).

   a) Calcule el espesor de la lámina.

   b) ¿En qué longitudes de onda del rango visible se observarán las mínimas intensidades reflejadas (interferencia destructiva)?

2. Considere la superficie plana de un vidrio de índice de refracción $n_1 = 1.57$, sobre la cual se ha depositado una capa delgada de otro material transparente de índice de refracción $n_2 = 1.44$. Si el espesor de la capa es de 2×10^{-4} mm, calcule:

   a) Las longitudes de onda del espectro visible que se intensifican como consecuencia de la interferencia por reflexión (considere el espectro visible entre 400 nm y 700 nm).

   b) las longitudes de onda del rango visible en que se observa atenuación en la luz reflejada.

3. La cara esférica de una lente plano convexa se apoya sobre una superficie plana de vidrio, constituyendo el montaje habitual para observar anillos de Newton por reflexión. Cuando se utiliza luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 440$ nm, se observa que el tercer anillo brillante posee un radio de 1.091 mm.

   a) ¿Cuál será el radio de curvatura de la cara convexa de la lente?

   b) Evalúe si el centro se verá brillante u oscuro (Justifique).

   c) Calcule el radio del tercer anillo oscuro.

4. Explique el fenómeno que se observa en el borde de las gotas de aceite flotantes, iluminadas por el Sol. En dichos bordes suelen verse franjas de múltiples colores que siguen el contorno de la gota cuando se refleja la luz del Sol.

5. Considere la imagen de difracción de Franhofer producida por una ranura. Suponga que dicha imagen se observa sobre una pantalla colocada a 1.2 m de la ranura, y que la luz utilizada posee una longitud de onda $\lambda = 620$ nm. Si el ancho del máximo central de la imagen es de 2.4 cm, calcule:

   a) El ancho de la ranura.

   b) La posición del segundo mínimo de difracción.

   c) La intensidad relativa I/I_0 en un punto situado a 1.8 cm del centro de la imagen (I_0 representa la intensidad en el centro de la imagen).

6. Una ranura de 0.003 mm de ancho es iluminada con luz monocromática de longitud de onda 586 nm. Su diagrama de difracción de Franhofer es proyectado sobre una pantalla colocada en el plano focal de una lente cuya distancia focal es de 45 cm (suponga que la luz se encuentra con la lente justo después de pasar por la ranura).

   a) Calcule las posiciones de los tres primeros mínimos del diagrama.

   b) Estime las posiciones de los dos primeros máximos secundarios.

   c) Determine la intensidad relativa de los máximos secundarios en relación con el máximo central.

7. Dos rendijas paralelas idénticas son iluminadas con un haz coherente de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 557$ nm. El ancho de cada rendija es $a = 8 \times 10^{-4}$ mm, mientras que la distancia entre sus ejes centrales es $d = 1.6 \times 10^{-3}$ mm. La imagen de difracción de Franhofer del sistema se forma sobre una pantalla a 1 m de las rendijas.

   a) Calcule la posición del primer mínimo de difracción.

   b) ¿Cuántas franjas de interferencia se observarán dentro del máximo central de difracción?

8. Una red de difracción ha sido construída con 300 líneas por milímetro y se ilumina mediante un haz monocromático intrínsecamente coherente, formado por rayos paralelos de longitud de onda $\lambda = 577$ nm.

   a) Calcule la desviación angular de los rayos que forman los primeros máximos principales para este color.

   b) Calcule los rangos angulares en que se desarrollan los espectros visibles de primero, segundo y tercer orden para esta red (considere los límites del espectro visible en 400 nm y 700 nm).

9. Una red de difracción desvía la luz de 577 nm subtendiendo un ángulo de 17.45^o en su espectro de primer orden.

   a) Calcule el número de ranuras por unidad de longitud en la red.

   b) Determine el ángulo de desviación en el espectro de primer orden para la luz de 442 nm.

   c) Determine los ángulos límite de desviación para el espectro visible a segundo orden con esta red.

10. La pupila de un ojo habituado a la visión nocturna, posee típicamente un radio de 2 mm. Tomando como referencia el centro del espectro visible ($\lambda = 550$ nm), determine:

    a) La máxima distancia a la que pueden verse separadamente los faros de un automóvil, cuya separación real es de 1.2 m.

    b) La mínima distancia entre detalles separables a simple vista sobre la superficie de la Luna, sabiendo que su distancia a la Tierra es de 384000 Km.

11. *a*) Un automovilista sale de un lugar muy iluminado hacia un camino oscuro. En estas condiciones, sus pupilas tienen un radio de 1 mm. Determine la máxima distancia a la que puede resolver las luces de un auto lejano. Suponga que dichas luces se encuentran separadas 1.2 m y que la longitud de onda efectiva es de 550 nm.

    b) Después de un período de adaptación a la visión nocturna, el radio de sus pupilas se ha duplicado. ¿Será entonces posible que el automovilista distinga las luces de otros autos que se hallan a 5.1 Km, $8.4\,Km$ y 11.2 Km?

12. Considere una lámina delgada de vidrio (índice de refracción $n = 1,5$) cuyo espesor es de $d = 0,002$ mm. Suponga que luz monocromática linealmente polarizada incide perpendicularmente sobre la lámina. Suponga además que la longitud de onda de la luz incidente en el vacío es $\lambda = 600$ nm, y la intensidad es I_0. Teniendo en cuenta solo la interferencia de las dos ondas más intensas que emergen de la placa por reflexión, determine la intensidad de la luz reflejada en función de I_0.

Anexo I

CONSTANTES FÍSICAS		
Constante	Símbolo	Valor
Carga elemental	e	1.6×10^{-19}C
Constante electrostática	K	9×10$^{9}Nm^2/C^2$
Constante magnética	K'	4π×10$^{-7}Tm/A$
Masa del electrón	m_e	9.11×10^{-31}Kg
Masa del protón	m_p	1.67×10^{-27}Kg
Permeabilidad magnética en el vacío	μ_0	1.26×10$^{-6}H/m$
Permitividad eléctrica del vacío	ϵ_0	8.85×10$^{-12}C^2/Nm^2$
Rapidez de la luz	c	3×10$^{8}m/s$

Los autores

Paola, Carlos Alejandro

Es Licenciado en Física, graduado en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNLP. Se desempeña como Profesor Adjunto de la Asignatura Física II en la Facultad de Ingeniería de la UNLP y Profesor Asociado en la Facultad Regional La Plata de la UTN. Además se desempeña como Profesor Adjunto de Física General III de la Fac. de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP.

De Vito, María Alejandra

Es Doctora en Astronomía, egresada de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP (FCAG). Actualmente se desempeña como Profesora Adjunta de la asignatura Electromagnetismo en la FCAG. Es Investigadora Adjunta del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), desarrollando su tarea de investigación en el estudio de la evolución estelar de estrellas binarias con transferencia de masa.

Dirani, Lorena Daniela

Es Licenciada en Astronomía, egresada de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP (FCAG). Actualmente se desempeña como Jefe de Trabajos Prácticos de la asignatura Física General III de la FCAG, y de la cátedra de Física II de la Facultad de Ingeniería de la UNLP y de la Facultad Regional La Plata de la UTN.

Libros de Cátedra

Paola, Carlos Alejandro
Electricidad y magnetismo / Carlos Alejandro Paola; María Alejandra De Vito; Lorena Daniela Dirani; contribuciones de Sofía Belén Giovannini; fotografías de Federico Ariel Bareilles; ilustrado por Cecilia Carolina Paola. - 1a ed. - La Plata: Universidad Nacional de La Plata; La Plata: EDULP, 2019.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-34-1799-7

1. Electricidad. 2. Magnetismo. 3. Ondas. I. Giovannini, Sofía Belén, colab. II. Bareilles, Federico Ariel, fot. III. Paola, Cecilia Carolina, ilus. IV. Título.
CDD 537

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2019
ISBN 978-950-34-1799-7





